II етап
Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2018-2019 навчальний рік

Вказівки до розв'язання задач

8 клас

1. *В трикутнику ABC проведено бісектрису BL. Через вершину A проведено пряму, що перпендикулярна до BL і перетинає сторону BC в точці K. Доведіть, що $AL = LK$.*

   Вказівки. Нехай D – точка перетину прямих AK і BL. Оскільки $\angle ABD = \angle DBK$, то $\angle BAD = \angle BKD$. Отже, трикутник ABK рівнобедрений, адже має два рівні кути про основі. Звідси випливає, що бісектриса BD є також і медіаною в трикутнику ABK. Тоді LD – це висота і медіана в трикутнику ALK. Значить, трикутник ALK рівнобедрений, тому $AL = LK$.

2. *Відомо, що магічні істоти Швидкорослики дуже швидко ростуть. Наприклад, швидкорослик Енді виростає за рік на 1 метр, а швидкорослик Банді – на 2 метри. Відомо, що 6 років тому Банді був в одинадцять разів довший за Енді, а 4 роки тому – в дев'ять разів довший. Який зріст зараз мають Енді та Банді?*

   Вказівки. Нехай a – це зріст Енді, а b – це зріст Банді. За умовою задачі

$$\begin{cases} b - 12 = 11(a-6), \\ b - 8 = 9(a-4). \end{cases}$$

   Розв'яжемо цю систему і отримаємо, що $a = 13$, $b = 89$.

3. Факторіалом *натурального числа n називається добуток всіх натуральних чисел від* 1 *до n включно (позначається цей добуток символом $n!$). Доведіть, що число*

$$2017! + 2018! + 2019!$$

   ділиться націло на 2019^2.

   Вказівки. $2017! + 2018! + 2019! = 2017!(1 + 2018 + 2018 \cdot 2019) = 2017! \cdot 2019^2$.

4. *У натурального числа n обчислили суму його цифр та відняли її від самого числа. У числа, яке при цьому отрималося, знову обчислили суму цифр і позначили її через m. Знайдіть всі такі натуральні числа n, для яких $m = 10$.*

   Вказівки. Позначимо через $S(n)$ суму цифр числа n. Покажемо, що число $n - S(n)$ кратне дев'яти. Якщо n – одноцифрове число, що $n - S(n) = 0$. Нехай n – k-цифрове число ($k \geq 2$), $n = \overline{a_1 \dots a_k}$. Тоді

$$n - S(n) = 10^k a_1 + 10^{k-1} a_2 + \dots + 10 a_{k-1} + a_k - (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k) =$$

$$= a_1(10^k - 1) + a_2(10^{k-1} - 1) + \cdots + a_{k-1}(10 - 1).$$

Зрозуміло, що всі числа, які знаходяться в кожній дужці правої частини рівності складаються з одних дев'яток і тому кратні 9. Отже, і вся сума кратна 9.

Згідно з доведеним вище, сума цифр числа $n - S(n)$ також кратна дев'яти. З іншого боку, $m = 10$ не кратне дев'яти. Отже, **не існує натуральних чисел** n, які задовольняють умову задачі.

5. *В країні Діагоналії є n міст (географам точно відомо, що $n \geq 5$), які розташовані на колі, причому всі відстані між сусідніми містами рівні. Відомо, що всі несусідні міста з'єднані прямими дорогами, які місцеві мешканці називають "діагоналями" (так вже історично склалося). Знайдіть найбільшу та найменшу кількість однакових за довжиною діагоналей.*

   Вказівки. Нехай $M_1, \ldots, M_n$ – міста в Діагоналії, K – коло, на якому лежать всі міста, D і d – найбільша та найменша кількості однакових за довжиною діагоналей, відповідно.

   За умовою задачі при повороті кола K структура країни не змінюється. Тому досить обчислити найбільшу кількість (позначимо її D_1) та найменшу кількість (позначимо її d_1) однакових діагоналей, що виходять з міста M_1, потім помножити D_1 і d_1 на n і розділити на два (бо кожна діагональ порахована двічі, адже з'єднує два міста).

   Зауважимо, що всі міста, які з'єднані з M_1 діагоналлю довжиною r лежать на колі K_r радіуса r з центром в точці M_1. Кола K і K_r перетинаються рівно в двох точках, якщо r менше, ніж діаметр кола K, і в одній точці, якщо r дорівнює діаметру кола K. Другий випадок можливий тільки, коли деяке місто розташоване діаметрально протилежно до міста M_1, тобто, у випадку парного n.

   Отже, у випадку непарного n всі діагоналі, що виходять з M_1 можна розбити на пари діагоналей однакової довжини (причому довжини діагоналей різних пар різні). Тоді $D_1 = d_1 = 2$, звідки маємо, що $D = d = n$.

   Якщо n – парне число, то до всіх пар однакових діагоналей долучається ще одна діагональ, яка проходить через центр кола K. В цьому випадку $D_1 = 2$ і $d_1 = 1$. Звідси $D = n$, $d = \frac{n}{2}$.

   Відповідь: найбільша кількість однакових за довжиною діагоналей дорівнює n, найменша кількість однакових за довжиною діагоналей дорівнює n (якщо n – непарне) і $\frac{n}{2}$ (якщо n – парне).

9 клас

1. *Факторіалом* натурального числа n називається добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно (позначається цей добуток символом $n!$). Доведіть, що число $2017! + 2018!$ ділиться націло на 2019.

   Вказівки. $2017! + 2018! = 2017!(1 + 2018) = 2017! \cdot 2019$.

2. *Розв'яжіть рівняння $x^3 + 3x = 4$.*

   Вказівки. Запишемо рівняння у вигляді $x^3 + 3x - 4 = 0$ і зауважимо, що

   $$x^3 + 3x - 4 = x^3 - 1 + 3x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 4).$$

   Оскільки $x^2 + x + 4 > 0$ для всіх дійсних чисел x, то маємо **відповідь:** $x = 1$.

3. *В трикутнику ABC на стороні AB вибрано точку D, на стороні BC – точку E так, що $BD = BE$. На стороні AC вибрано точку F так, що $CE = CF$. Відомо, що $\angle DEF = 40°$. Знайдіть $\angle BAC$.*

   Вказівки. За умовою задачі трикутники DBE та CEF рівнобедрені. Позначимо $\alpha = \angle BDE = \angle BED$ і $\beta = \angle CEF = \angle CFE$. З трикутника ABC маємо, що

   $$\angle BAC = 180° - (180° - 2\alpha) - (180° - 2\beta) = 2(\alpha + \beta) - 180°.$$

   З іншого боку, кут BEC – розгорнутий, тому $\alpha + \beta = 180° - 40° = 140°$. Отже, $\angle BAC = 100°$.

4. *В країні Діагоналії є n міст (географам точно відомо, що $n \geq 5$), які розташовані на колі, причому всі відстані між сусідніми містами рівні. Відомо, що всі несусідні міста з'єднані прямими дорогами, які місцеві мешканці називають "діагоналями" (так вже історично склалося). Знайдіть найбільшу та найменшу кількість однакових за довжиною діагоналей.*

   Вказівки. Див. задачу 8-5.

5. *У натурального числа n обчислили суму його цифр та відняли її від самого числа. У числа, яке при цьому отрималося, знову обчислили суму цифр і позначили її через m. Знайдіть всі такі натуральні числа n, для яких $m = 100$.*

   Вказівки. Див. задачу 8-4.

10 клас

1. *Чи існує зростаюча геометрична прогресія, у якої перші 100 членів - цілі числа, а всі решта члени не є цілими числами?*

   Розв'язання. Достатньо розглянути, наприклад, зростаючу геометричну прогресію з

   $$b_1 = 2^{99} \quad \text{і} \quad q = \tfrac{3}{2}.$$

   Тоді $b_n = 2^{100-n} \cdot 3^{n-1}$ для кожного натурального n. Цілі числа $100-n$ і $n-1$ є невід'ємними при $1 \le n \le 100$, тому перші 100 членів цієї прогресії - цілі числа. А при $n \ge 101$ дріб $\frac{3^{n-1}}{2^{n-100}}$ – нескоротний.

   Підходить також будь-яка зростаюча геометрична прогресія з

   $$b_1 = a^{99} \quad \text{і} \quad q = \tfrac{b}{a},$$

   де a і b – прості числа і $b > a$.

   Відповідь: існує

2. *Розв'яжіть в цілих числах рівняння*

   $$xy + 2018\,x - 2018\,y = 2019 \cdot 2017.$$

   Розв'язання. Оскільки $2019 \cdot 2017 = 2018^2 - 1$, то дане рівняння записується у вигляді

   $$(x - 2018)(y + 2018) = -1.$$

   Тому числа $x - 2018$ і $y + 2018$ є дільниками числа -1. Отже, маємо

   $$\begin{cases} x - 2018 = 1 \\ y + 2018 = -1 \end{cases}$$

   або

   $$\begin{cases} x - 2018 = -1 \\ y + 2018 = 1. \end{cases}$$

   Відповідь: $(x, y) \in \{(2019, -2019), (2017, -2017)\}$**.**

3. *Розв'яжіть нерівність*
$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} > x-8.$$

Розв'язання. Оскільки
$$x+4\sqrt{x-4} = (\sqrt{x-4}+2)^2,$$
то
$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} = |\sqrt{x-4}+2| = \sqrt{x-4}+2.$$
Тому нерівність має такий рівносильний вигляд
$$\sqrt{x-4}+2 > x-8.$$
Нехай $t=\sqrt{x-4}$. Тоді отримаємо нерівність
$$t^2-t-6<0,$$
розв'язками якої є
$$t\in(-2;3).$$
Врахувавши, що $t\geq 0$, одержимо
$$0\leq\sqrt{x-4}<3,$$
тобто
$$4\leq x<13.$$

Відповідь: $x\in[4,13)$**.**

4. *В опуклому чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD мають однакову довжину, а відрізки, які сполучають середини протилежних сторін перетинаються під прямим кутом. Доведіть, що $AD\|BC$.*

Розв'язання. Нехай A_1, B_1, C_1 і D_1 – середини сторін AB, BC, CD і DA відповідно. Тоді

1) $A_1B_1C_1D_1$ – паралелограм, оскільки його сторони паралельні до діагоналей чотирикутника $ABCD$ як середні лінії відповідних трикутників.

2) Оскільки $A_1C_1\perp B_1D_1$, то $A_1B_1C_1D_1$ – ромб, тобто $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=D_1A_1$.

3) $\triangle A_1BB_1=\triangle C_1CB_1$ (за трьома сторонами). Тому $\angle B=\angle C$.

4) $\triangle A_1AD_1=\triangle C_1DD_1$ (за трьома сторонами). Тому $\angle A=\angle D$.

Тепер маємо
$$360^\circ=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=2(\angle A+\angle B),$$
тобто $\angle A+\angle B=180^\circ$. Тому $AD\|BC$.

5. *Денис і Максим грають у гру. Вони по-черзі зафарбовують клітинки таблиці розміром* 6×6. *Спочатку одну клітинку за своїм вибором зафарбовує Денис, потім одну клітинку за своїм вибором зафарбовує Максим, і так далі. Гра закінчується, якщо у таблиці повністю зафарбовано два рядки, а гравець, який зробив останній хід, виграє гру. Чи може хтось з гравців забезпечити собі виграш?*

Розв'язання. Зауважимо, що за один хід кількість повністю зафарбованих рядків може збільшитись на 1. Тому кожна гра закінчиться перемогою одного з гравців.

Максим може забезпечити собі виграш, граючи згідно з таким правилом:

якщо Денис зафарбовує клітинку A, то Максим зафарбовує клітинку B, яка є симетричною клітинці A відносно центра таблиці O.

Оскільки всі клітинки таблиці розбиваються на пари симетричних клітинок і Максим ходить другим, то описане правило є коректним і Максим завжди може грати згідно з ним.

Нехай Максим грає згідно з цим правилом. Тоді після кожного ходу Максима всі зафарбовані клітинки утворюють фігуру, симетричну відносно центра таблиці O. Оскільки всі рядки таблиці розбиваються на три пари симетричних рядків, то кількість повністю зафарбованих рядків після ходу Максима є парною (0 або 2). Отже, **якщо хід Максима не є виграшним, то кількість повністю зафарбованих рядків після його ходу дорівнює нулю. Тому наступний хід Дениса не є виграшним**, бо не можуть за один хід з'явитись 2 повністю зафарбованих рядки.

Таким чином, **якщо хід Максима не є виграшним, то наступний хід Дениса також не є виграшним**. Тому Денис виграти не може. Значить, виграє Максим.

11 клас

1. *Розв'яжіть рівняння*

$$9^x + 1 = 10 \cdot 3^{x-1}.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $t = 3^x$ і отримаємо рівняння

$$t^2 + 1 = \tfrac{10}{3} t,$$

яке має розв'язки $t_1 = 3$ і $t_2 = \frac{1}{3}$. Тому $x_1 = 1$ і $x_2 = -1$.

Відповідь: $x \in \{-1, 1\}$**.**

2. *Розв'яжіть рівняння в невід'ємних цілих числах*

$$2018^x = y^2 + y - 1.$$

Розв'язання. Якщо $x > 0$, то число 2018^x парне. З іншого бону, число $y^2 + y - 1$ непарне, оскільки число $y^2 + y = y(y+1)$ парне, як добуток двох сусідніх цілих чисел. Тому при $x > 0$ рівняння розв'язків не має.

Тепер нехай $x = 0$. Тоді отримуємо рівняння

$$y^2 + y - 2 = 0,$$

яке має лише один невід'ємний розв'язок $y = 1$.

Відповідь: $x = 0$**,** $y = 1$**.**

3. *В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD є бісектрисами кутів чотирикутника при вершинах A і D відповідно. Крім того, відомо, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло і сторона AD має вдвічі більшу довжину, ніж сторона BC. Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$.*

Розв'язання. 1) Оскільки вписані в коло кути, які опираються на одну дугу є рівними, то з умови задачі випливає рівність

$$\angle CBD = \angle CAD = \angle CAB = \angle CDB = \angle BDA = \angle BCA = \alpha.$$

2) Трикутники $\triangle ABC$ і $\triangle BCD$ рівнобедрені. Тому

$$AB = BC = CD = a.$$

3) Оскільки $AB = CD = a$ і $\angle BAD = \angle CDA = 2\alpha$, чотирикутник $ABCD$ є рівнобедреною трапецією з основами $BC = a$ і $AD = 2a$.

4) Нехай E – середина AD. Тоді $AE = ED = a$, а чотирикутники $ABCE$ і $BCDE$ – паралелограми, як чотирикутники з парою рівних і паралельних сторін. Отже,

$$BE = CD = AB = CE = a.$$

5) Трикутники $\triangle ABE$, $\triangle BCE$ і $\triangle CDE$ – рівносторонні. Тому $\angle A = \angle D = 60°$ і $\angle B = \angle C = 120°$.

Відповідь: $\angle A = \angle D = 60°$**,** $\angle B = \angle C = 120°$**.**

4. *Розв'яжіть нерівність*

$$3\cos\,x+\cos\left(2x\right)+\sin^2\,x\geq\frac{|x|}{\pi}+\frac{4\pi}{|x|}.$$

Розв'язання. Оскільки $|\cos x|\leq 1$, то

$$3\cos\,x+\cos\left(2x\right)+\sin^2\,x=3\cos\,x+\cos^2\,x-\sin^2\,x+\sin^2\,x=3\cos\,x+\cos^2\,x\leq 4.$$

З іншого боку, згідно з нерівністю Коші

$$\frac{|x|}{\pi}+\frac{4\pi}{|x|}\geq 2\sqrt{\frac{|x|}{\pi}\frac{4\pi}{|x|}}=4.$$

Отже, дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 3\cos\,x+\cos^2\,x=4 \\ \frac{|x|}{\pi}+\frac{4\pi}{|x|}=4. \end{cases}$$

З другого рівняння маємо $|x|=2\pi$. Залишилось підставити у перше рівняння.

Відповідь: $x\in\{-2\pi,2\pi\}$**.**

5. *Денис і Максим грають у гру. Вони по черзі зафарбовують клітинки таблиці розміром* 7×7*. Спочатку одну клітинку за своїм вибором зафарбовує Денис, потім одну клітинку за своїм вибором зафарбовує Максим, і так далі. Гра закінчується, якщо у таблиці повністю зафарбовано хоча б один рядок, а гравець, який зробив останній хід, виграє гру. Чи може хтось з гравців забезпечити собі виграш?*

Розв'язання. Зауважимо, що за один хід кількість повністю зафарбованих рядків може збільшитись на 1. Тому кожна гра закінчиться перемогою одного з гравців.

Денис може забезпечити собі виграш, граючи згідно з такими правилами:

1) першим ходом Денис зафарбовує центральну клітинку;

2) якщо перед його ходом в якомусь рядку зафарбовано 6 клітинок, то він зафарбовує в цьому рядку останню клітинку і виграє гру;

3) якщо перед його ходом в жодному рядку не зафарбовано 6 клітинок і Максим попереднім ходом зафарбовує клітинку A*, то Денис зафарбовує клітинку* B*, яка є симетричною клітинці* A *відносно центра таблиці* O*.*

Оскільки всі клітинки таблиці, крім центральної, розбиваються на пари симетричних клітинок, то Денис завжди може грати згідно з даними правилами.

Розглянемо два послідовні ходи: Дениса і Максима. Перед ходом Дениса немає рядків, в яких зафарбовано 6 клітинок, бо інакше Денис закінчує гру. Тому після ходу Дениса **рядків, в яких зафарбовано 6 клітинок, є не більше одного**. Всі зафарбовані клітинки утворюють фігуру, симетричну відносно центра таблиці O, адже Денис до цього моменту грав лише симетрично. Зокрема, 4-й рядок заповнений симетрично і в ньому зафарбовано непарну кількість клітинок і **ця кількість не дорівнює 6**. Всі рядки таблиці, крім 4-го, розбиваються на три пари симетричних рядків. Тому і серед них **немає такого, у якому зафарбовано 6 клітинок**, бо інакше таких рядків була б парна кількість >1. Отже, після ходу Дениса **рядків, в яких зафарбовано 6 клітинок, немає**. Тому **наступним ходом Максим не може завершити гру.**

Таким чином, **жодний хід Максима не є виграшним**. Тому виграє Денис.