ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2021-2022 н.р.

Умови та розв'язки

6 клас

1. В соцмережі «ТукТук» при реєстрації нового акаунту обов'язково вказується колір волосся. Руді користувачі становлять 10% загальної кількості користувачів мережі, серед них 30% мають нік, що починається літерою "Т". Скільки всього користувачів соцмережі, якщо рудих користувачів з ніком на літеру "Т" зареєстровано 12 324?

   Розв'язання. Рудих користувачів всього $12324 : \frac{3}{10} = 41080$, а тоді усіх користувачів соцмережі $41080 : \frac{1}{10} = 410800$.

   Відповідь: 410800.

2. Чотири прямокутні фотографії однакового розміру можна розмістити в три різні фоторамки способами, як показано на малюнках. Відомо, що периметр однієї з цих фоторамок 98 см. Знайдіть периметри інших двох, якщо периметр фотографії 44 см.

   Розв'язання. Для знаходження периметру другої фоторамки потрібно чотири рази додати ширину фотографії та чотири рази додати довжину фотографії, тобто, периметр цієї фоторамки є вдвічі більшим за периметр фотографії, а значить 88.

   Периметр першої фоторамки складається з чотирьох периметрів фотографії за винятком шести довжин бічної сторони. Якщо цей периметр – 98, то шість довжин бічної сторони складають $4 \cdot 44 - 98 = 78$, звідки довжина бічної сторони фотографії $78 : 6 = 13$ см.

   Тоді довжина іншої бічної сторони фотографії дорівнює 9 см, адже периметр фотографії 44 см за умовою задачі. Тоді периметр третьої фоторамки складає $8 \cdot 13 + 2 \cdot 9$=182 см.

   Розв'язання не змінюється, якщо припустити, що периметр третьої фоторамки 98 см.

   Відповідь: 98 см і 182 см.

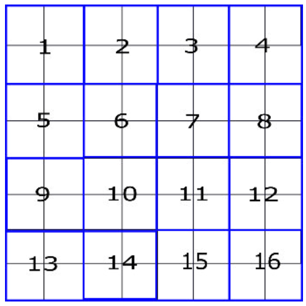
3. Мама Каріна, Владік та Сашко йдуть в магазин. Поки мама Каріна робить 4 кроки, Владік робить 7 кроків. Поки Владік робить 4 кроки, Сашко робить 7 кроків. Дорогою до магазину Владік і Сашко порахували, що разом вони зробили 462 кроки. Скільки кроків зробила мама Каріна? Поясніть свою відповідь.

   Розв'язання. Поки Владік робить $4 \cdot 7 = 28$ кроків, то мама робить $4 \cdot 4 = 16$, а Сашко $7 \cdot 7 = 49$ кроків. Отже разом Владік і Сашко роблять $28 + 49 = 77$ кроків, поки мама робить 16. Тоді, якщо Владік та Сашко зробили $462 = 77 \cdot 6$ кроків, то мама зробила $16 \cdot 6 = 96$ кроків.

   Відповідь: 96 кроків.

4. Зафарбуйте клітинки таблиці 8×8 максимально можливою кількістю різних кольорів так, щоб кожна клітинка мала хоча б дві сусідні до неї (по стороні) клітинки її кольору. Кожну клітинку можна зафарбувати тільки одним кольором. Обґрунтуйте, чому не можна розфарбувати таблицю більшою кількістю кольорів.

Розв'язання. Найменша фігурка одного кольору, що відповідає умові задачі, містить ≥ 4 клітинки, бо довільна фігурка з трьох клітинок має дві клітинки, що не мають однокольорових сусідок. Таблиця 8×8 має 64 клітинки, отже 4-клітинних фігурок різного кольору може поміститися щонайбільше 16. Ось приклад такого розфарбування в 16 різних кольорів:



7 клас

1. Ромчик погано вчив математику у вересні та жовтні, тому в його щоденнику одна двійка, дві трійки, дві четвірки, одна п'ятірка, три сімки і навіть одна вісімка. У листопаді він зібрався з силами і почав отримувати тільки десятки. Яку найменшу кількість десяток потрібно заробити Ромчику, щоб його середній бал з математики в кінці семестру став рівний 8?

Розв'язання. Нехай x – необхідна кількість десяток. Тоді загальна кількість оцінок у Ромчика буде $10 + x$, а сума оцінок $2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 + 3 \cdot 7 + 8 + 10x = 50 + 10x$. Складемо рівняння

$$(50 + 10x) : (10 + x) = 8.$$

Тоді $50 + 10x = 8(10 + x)$, звідки $x = 15$.

Відповідь: 15 десяток.

2. Відомо, що містеру Аутофейджу більше 9 років і менше 100 років. Одного листопадового вечора він написав на серветці свій вік тричі поспіль. Доведіть, що отримане число ділиться націло на 7.

Розв'язання. Нехай вік містера Аутофейджа записується двозначним числом $\overline{ab}$. Запишемо його вік тричі поспіль та отримаємо шестизначне число $\overline{ababab}$. Оскільки

$$\overline{ababab} = 100000 \cdot a + 10000 \cdot b + 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot a + b =$$

$$= 101010a + 10101b = 10101(10a + b) = 7 \cdot 1443 \cdot (10\mathrm{a} + \mathrm{b}),$$

то $\overline{ababab}$ ділиться націло на 7.

3. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо бісектриси двох його кутів перетинаються під кутом 50°.

Розв'язання. Нехай C – прямий кут трикутника ABC. Бісектриси кутів A і B прямокутного трикутника перетинаються під кутом 135°, що не задовольняє умову задачі. Нехай бісектриси CM і AK кутів C і A перетинаються під кутом 50° в точці I. В трикутнику CIK:

$$\angle CKI = 180° - 45° - 50° = 85°,$$

а в трикутнику CAK:

$$\angle CAK = 90° - \angle CKA = 90° - 85° = 5°.$$

Отже, $\angle CAB = 2\angle CAK = 10°$, $\angle CBA = 80°$.

Відповідь: $10°, 80°, 90°$.

4. Задача 6-4.

8 клас

1. У виразі $(x^3 - 2)^2 + (x^2 + *)^2$ замініть $*$ на одночлен так, щоб після розкриття дужок та зведення подібних доданків залишилося 4 доданки.
Розв'язання. Підставимо замість $*$ одночлен ax. Тоді після розкриття дужок отримаємо вираз
$$x^6 + x^4 + x^3(2a - 4) + a^2x^2 + 4.$$
Для того, щоб залишилося 4 доданки потрібно підставити $a = 2$ або $a = 0$.
Відповідь: $2x$ або 0.

2. Наведіть приклад тризначного числа, яке не ділиться націло на 114, але виписане 12 разів поспіль дає число, яке ділиться націло на 114. Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Число ділиться на $114 = 2 \cdot 3 \cdot 19$ тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на кожне з чисел 2,3,19. Розглянемо тризначне число, яке ділиться на 2 і 19 і не ділиться на 3, наприклад, $152 = 8 \cdot 19$. Зрозуміло, що 152 не кратне 114. Випишемо 152 поспіль 12 разів:

$$A = 152152 \dots 152 = 152\,(10^9 + 10^8 + \dots + 10 + 1).$$

Звідси A ділиться націло на 2 і на 19, адже це дільники числа 152. Крім того, довільне число, виписане 12 разів поспіль має суму цифр, кратну 3, отже, ділиться на 3.

Відповідь: 152.

Примітка: можуть бути й інші відповіді.

3. Настала осінь. На дереві висять зелені, жовті та червоні листочки. Зелені листочки можуть пожовтіти або почервоніти. Жовті та червоні листочки трохи повисять, а потім відпадають. Вчора на дереві зелених листочків було стільки ж, скільки червоних, а жовтих – у 9 разів більше, ніж червоних. Сьогодні на дереві порівну зелених та жовтих листочків, а червоних – в 9 разів більше, ніж жовтих. Доведіть, що за ніч кількість листочків на дереві зменшилася хоча би в 5 разів.

Розв'язання. Позначимо через a кількість зелених листочків вчора і через b – кількість зелених листочків сьогодні. Тоді вчора на дереві було a червоних та $9a$ жовтих листочків, а сьогодні – b

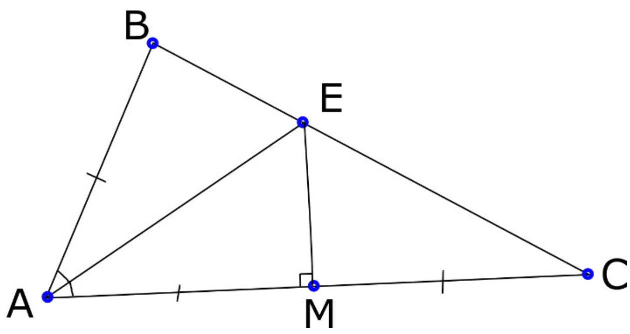
жовтих і $9b$ червоних. За умовою задачі, сума зелених та червоних листочків може тільки зменшитися, тому $10b \leq 2a$. Звідси $b \leq \frac{1}{5}a$. Отже, сьогодні на дереві $11b \leq \frac{1}{5} \cdot 11a$ листочків, що принаймні в 5 разів менше, ніж учора.

4. Чи існують такі цілі числа a, b, c, d, що числа $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-a$, виписані в деякому порядку, будуть чотирма послідовними цілими числами?

Розв'язання. Припустимо, що такі числа існують. Тоді їх сума дорівнює нулеві. З іншого боку – це чотири послідовних цілих числа виду $n, n+1, n+2, n+3$, сума яких $4n+6$. Зрозуміло, що $4n+6 \neq 0$ для жодного цілого числа n. Отримана суперечність доводить, що наше початкове припущення не вірне.

Відповідь: таких чисел не існує.

5. В трикутнику ABC проведено бісектрису AE. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $AC = 2AB$ і $AE = EC$.



Розв'язання. Проведемо медіану EM в трикутнику AEC. За умовою $AM = MC = AB$. Оскільки ΔAEC рівнобедрений, то EM є також і висотою. Розглянемо трикутники ABE і AME. Вони рівні, адже $AB = BM$, $\angle BAE = \angle EAM$, а сторона AE спільна. Отже, $\angle ABE = \angle AME = 90°$. Таким чином, ΔABC – прямокутний, в якому гіпотенуза вдвічі більша за катет. А такий трикутник має гострі кути $30°$ та $60°$.

Відповідь: $30°, 60°, 90°$.

9 клас

Задача 9.1. *Розв'яжіть рівняння*

$$\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{5}}{x\sqrt{2}-\sqrt{5}}+\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{5}}{x\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{14x}{2x^2-5}.$$

Розв'язання. У лівій частині рівняння зведемо вирази до спільного знаменника і зробимо рівносильні перетворення чисельника. В результаті одержимо таке рівняння

$$\frac{4x^2+10}{2x^2-5}=\frac{14x}{2x^2-5}.$$

Отже, залишилось розв'язати таке квадратне рівняння

$$2x^2-7x+5=0.$$

Відповідь: $x \in \{1; \frac{5}{2}\}$**.**

Задача 9.2. *Довжина сторони квадрата $ABCD$ дорівнює 2. На сторонах AB, BC і CD вибрали точки U, V і W відповідно. Відомо, що*

$$AU+DW=BU+CW=2CV.$$

Знайдіть площу трикутника UVW.

Розв'язання. Позначимо $AU=x$ і $CW=y$. Тоді $BU=2-x$ і $D=2-y$. Згідно з першою рівністю з умови задачі маємо

$$x+(2-y)=y+(2-x),$$

звідки $x=y$. Отже, відрізок UW ділить квадрат $ABCD$ на дві рівні трапеції $AUWD$ і $CWUB$, площа кожної з яких дорівнює половині площі квадрата, тобто 2.

З другої рівності з умови задачі маємо

$$2CV=AU+DW=x+(2-x)=2,$$

отже, $BV=CV=1$. Тому

$$S_{UBV}+S_{WCV}=\tfrac{1}{2}\cdot BU\cdot BV+\tfrac{1}{2}\cdot CW\cdot CV=\tfrac{1}{2}((2-x)+x)=1.$$

Таким чином,

$$S_{UVW}=S_{CWUB}-S_{UBV}-S_{WCV}=2-1=1.$$

Відповідь: $S_{UVW}=1$**.**

Задача 9.3. *Знайдіть всі пари натуральних чисел a та b, які задовільняють рівність*

$$a^2=2021+b^2.$$

Розв'язання. Дану рівність можна записати у такому вигляді

$$(a+b)(a-b)=2021.$$

Зауважимо, що $2021=2021\cdot 1=43\cdot 47$, причому числа 43 і 47 є простими. Беручи до уваги, що $a+b>a-b$, ми одержуємо наступні дві системи рівнянь

$$\begin{cases} a+b=2021, \\ a-b=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=47, \\ a-b=43. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи одержуємо відповідь.

Відповідь: $a = 1011$, $b = 1010$ або $a = 45$, $b = 2$.

Задача 9.4. *Десяткові записи кожного з двох п'ятицифрових чисел A та B складаються з різних цифр і, крім того, ці записи на мають спільних цифр. Довести, що сума цих чисел націло ділиться на 9.*

Розв'язання. Оскільки всі цифри п'ятицифрових чисел A та B є різними і всього різних цифр є 10, то у десятковому записі цих чисел зустрічається рівно по одному разу кожна цифра від 0 до 9. Позначимо через S_A і S_B суми цифр чисел A та B відповідно. Тоді

$$S_A + S_B = 0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45.$$

Оскільки всі числа $10-1$, $100-1$, $1000-1$ і $10000-1$ діляться націло на 9, то числа $A - S_A$ та $B - S_B$ також націло діляться на 9. Справді,

$$A - S_A = \overline{abcde} - (a+b+c+d+e) = (10000-1)a + (1000-1)b + (100-1)c + (10-1)d.$$

Тому число

$$A + B = (A - S_A) + (B - S_B) + (S_B + S_A) = (A - S_A) + (B - S_B) + 45$$

націло ділиться на 9, як сума трьох чисел з такою властивістю.

Задача 9.5. *У квадратній таблиці розміром* 6×6 *розмістили n додатних чисел і n від'ємних чисел так, що в кожному рядку і кожному стовпці немає чисел різних знаків. Для якого найбільшого n можна це зробити?*

Розв'язання.

Спочатку доведемо, що $n \le 9$.

Назвемо рядок або стовпчик таблиці *додатним* (*від'ємним*), якщо в ньому є хоча б одне додатне (від'ємне) число. Згідно з умовою задачі кожний рядок (стовпчик) таблиці є або додатним, або від'ємним або немає назви. Позначимо через r^+, r^-, s^+ і s^- кількість додатних і від'ємних рядків і стовпчиків відповідно. Оскільки таблиця має 6 рядків і 6 стовпчиків, то

$$r^+ + r^- \le 6 \qquad \text{і} \qquad s^+ + s^- \le 6.$$

Тому $r^+ + s^+ \le 6$ або $r^- + s^- \le 6$. Розглянемо випадок $r^+ + s^+ \le 6$ (якщо $r^- + s^- \le 6$, то міркуємо аналогічно). Зазначимо, що кожне із n додатних чисел записане в клітинці, яка знаходиться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика. З іншого боку, клітинок, які знаходяться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика, є $r^+ \cdot s^+$. Тому

$$n \le r^+ \cdot s^+.$$

Тепер з допомогою нерівності $4ab \le (a+b)^2$ отримуємо

$$n \le r^+ \cdot s^+ \le \frac{1}{4}(r^+ + s^+)^2 \le \frac{1}{4} \cdot 6^2 = 9.$$

Залишилось навести приклад розташування дев'яти додатних чисел і дев'яти від'ємних чисел. Одним з таких прикладів є такий: у верхньому лівому квадраті розміром 3×3 записуємо додатні числа, а у нижньому правому квадраті розміром 3×3 записуємо від'ємні числа.

Відповідь: $n = 9$.

10 клас

Задача 10.1. *Розв'яжіть рівняння*

$$\frac{x^2+6}{x} + \frac{x}{x^2+6} = \frac{26}{5}.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $y = \frac{x^2+6}{x}$ і одержимо рівняння

$$y + \frac{1}{y} = \frac{26}{5},$$

звідки $y = \frac{1}{5}$ або $y = 5$. Отже, залишилось розв'язати два наступні рівняння

$$\frac{x^2+6}{x} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{x^2+6}{x} = 5,$$

які стандартним чином зводяться до квадратних. Перше з ний розв'язків не має, а друге має розв'язки 2 і 3.

Відповідь: $x \in \{2; 3\}$**.**

Задача 10.2. *У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом при вершині C проведено висоту CD. Знайти кути трикутника, якщо*

$$CD^2 = BD^2 - 6AD^2.$$

Розв'язання. Зауважимо, що трикутники ABC, ACD і CBD подібні. Тому, зокрема,

$$AD : CD = CD : BD,$$

тобто

$$CD^2 = BD \cdot AD.$$

Врахувавши рівність з умови задачі маємо

$$BD \cdot AD = BD^2 - 6AD^2.$$

Тепер поділивши на AD^2 і позначивши $k = \frac{BD}{AD}$, одержимо таке рівняння

$$k = k^2 - 6.$$

Оскільки $k > 0$, то $k = 3$. Тому

$$CD^2 = BD \cdot AD = 3 \cdot AD^2,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{CD}{AD} = \sqrt{3},$$

тобто $\angle A = 60^\circ$ і $\angle B = 30^\circ$.

Відповідь: $\angle A = 60^\circ$ і $\angle B = 30^\circ$.

Задача 10.3. *Знайдіть всі трійки натуральних чисел a, b та c, які задовільняють рівність*

$$25a^2 - 2bc = 2021 + b^2 + c^2.$$

Розв'язання. Дану рівність можна записати у такому вигляді
$$25a^2 - (b+c)^2 = 2021,$$
тобто
$$(5a+b+c)(5a-b-c) = 2021.$$
Зауважимо, що $2021 = 2021 \cdot 1 = 43 \cdot 47$, причому числа 43 і 47 є простими. Таким чином, ми одержуємо наступні дві системи рівнянь
$$\begin{cases} 5a+b+c = 2021, \\ 5a-b-c = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5a+b+c = 47, \\ 5a-b-c = 43. \end{cases}$$
Ров'язуючи першу систему, одержуємо $10a = 2022$, що неможливо. Розв'язавши другу систему, одержуємо, що $a = 9$ і $b + c = 2$. Оскільки $b \leq 1$ і $c \leq 1$, то $b = c = 1$.

Відповідь: $a = 9$, $b = 1$, $c = 1$.

Задача 10.4. *Десяткові записи кожного з двох п'ятицифрових чисел A та B складаються з різних цифр і, крім того, ці записи на мають спільних цифр. Довести, що сума кубів цих чисел націло ділиться на 9.*

Розв'язання. Оскільки всі цифри п'ятицифрових чисел A та B є різними і всього різних цифр є 10, то у десятковому записі цих чисел зустрічається рівно по одному разу кожна цифра від 0 до 9. Тому сума цифр S чисел A та B дорівнює
$$S = 0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45.$$
Позначимо через S_A і S_B суми цифр чисел A та B відповідно. зрозуміло, що
$$S_A + S_B = S = 45.$$
Оскільки всі числа $10-1$, $100-1$, $1000-1$ і $10000-1$ діляться націло на 9, то числа $A - S_A$ та $B - S_B$ також націло діляться на 9. Справді,
$$A - S_A = \overline{abcde} - (a+b+c+d+e) = (10000-1)a + (1000-1)b + (100-1)c + (10-1)d.$$
Тому число
$$A + B = (A - S_A) + (B - S_B) + (S_B + S_A) = (A - S_A) + (B - S_B) + 45$$
націло ділиться на 9, як сума трьох чисел з такою властивістю. Залишилось зауважити, що число $A^3 + B^3$ націло ділиться на $A + B$, адже $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$.

Задача 10.5. *У квадратній таблиці розміром 8×8 розмістили n чисел 1 і n чисел -1 так, що в кожному рядку і кожному стовпці немає чисел різних знаків. Для якого найбільшого n можна це зробити?*

Розв'язання. Спочатку доведемо, що $n \leq 16$.

Назвемо рядок або стовпчик таблиці *додатним* (*від'ємним*), якщо в ньому є хоча б одна число 1 (число -1). Згідно з умовою задачі кожний рядок (стовпчик) таблиці є або додатним, або від'ємним або немає назви. Позначимо через r^+, r^-, s^+ і s^- кількість додатних і від'ємних рядків і стовпчиків відповідно. Оскільки таблиця має 8 рядків і 8 стовпчиків, то
$$r^+ + r^- \leq 8 \qquad \text{і} \qquad s^+ + s^- \leq 8.$$
Тому $r^+ + s^+ \leq 8$ або $r^- + s^- \leq 8$. Розглянемо випадок $r^+ + s^+ \leq 8$ (якщо $r^- + s^- \leq 8$, то міркуємо аналогічно). Зазначимо, що кожне із n чисел 1 записане в клітинці, яка знаходиться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика. З іншого боку, клітинок, які знаходяться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика, є $r^+ \cdot s^+$. Тому
$$n \leq r^+ \cdot s^+.$$

Тепер з допомогою нерівності $4ab \le (a+b)^2$ отримуємо
$$n \le r^+ \cdot s^+ \le \tfrac{1}{4}(r^+ + s^+)^2 \le \tfrac{1}{4} \cdot 8^2 = 16.$$

Залишилось навести приклад розташування шістнадцяти чисел 1 і шістнадцяти чисел -1. Одним з таких прикладів є такий: у верхньому лівому квадраті розміром 4×4 записуємо числа 1, а у нижньому правому квадраті розміром 4×4 записуємо числа -1.

Відповідь: $n = 16$.

11 клас

Задача 11.1. *Розв'яжіть рівняння*
$$9^{x+1} - 4 \cdot 25^x = 5 \cdot 15^x.$$

Розв'язання. Поділивши рівняння на 25^x і зробивши заміну $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, одержимо рівняння
$$9y^2 - 4 = 5y,$$
звідки $y = -\frac{4}{9}$ (що не підходить, адже $y > 0$) або $y = 1$. Звідки $x = 0$.

Відповідь: $x = 0$.

Задача 11.2. *Знайдіть кути ромба, якщо*
$$\sqrt{3} \cdot d_1 d_2 = 16r^2,$$
де d_1 і d_2 – довжини діагоналей ромба, а r – радіус кола, вписаного в ромб.

Розв'язання. Нехай a – довжина сторони ромба і S – площа ромба. Відомо, що
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot d_1 d_2 = p \cdot r = 2a \cdot r,$$
де $p = 2a$ – півпериметр ромба. Тепер маємо
$$16r^2 = \sqrt{3} \cdot d_1 d_2 = 2\sqrt{3} \cdot S = 4\sqrt{3} \cdot a \cdot r.$$
Звідки $r = \frac{\sqrt{3}}{4} a$.

Нехай 2α – один з кутів ромба, наприклад, з якого виходить діагональ довжиною d_1. Тоді
$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{r}{a} = \frac{r}{\frac{1}{2}d_1} \cdot \frac{\frac{1}{2}d_1}{a} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha).$$
Звідки $2\alpha = 60^\circ$ або $2\alpha = 120^\circ$.

Відповідь: 60° і 120°.

Задача 11.3. *Знайдіть всі трійки натуральних чисел a, b та c, які задовільняють рівність*
$$81a^2 - 2bc = 2021 + b^2 + c^2.$$

Розв'язання. Дану рівність можна записати у такому вигляді
$$81a^2 - (b+c)^2 = 2021,$$
тобто
$$(9a + b + c)(9a - b - c) = 2021.$$

Зауважимо, що $2021 = 2021 \cdot 1 = 43 \cdot 47$, причому числа 43 і 47 є простими. Таким чином, ми одержуємо наступні дві системи рівнянь

$$\begin{cases} 9a+b+c=2021, \\ 9-b-c=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 9a+b+c=47, \\ 9a-b-c=43. \end{cases}$$

Ров'язуючи першу систему, одержуємо $18a = 2022$, що неможливо. Розв'язавши другу систему, одержуємо, що $a = 5$ і $b + c = 2$. Оскільки $b \leq 1$ і $c \leq 1$, то $b = c = 1$.

Відповідь: $a = 5$, $b = 1$, $c = 1$.

Задача 11.4. *Десяткові записи кожного з двох п'ятицифрових чисел A та B складаються з різних цифр і, крім того, ці записи на мають спільних цифр. Довести, що для кожного непарного натурального числа n сума $A^n + B^n$ націло ділиться на 9. Чи обовязково число $A^2 + B^2$ націло ділиться на 9?*

Розв'язання. Зауважимо спочатку, що для кожного непарного натурального числа n сума $A^n + B^n$ націло ділиться на $A + B$. Справді, згідно з формулою суми n членів геометричної прогресії з першим членом $b_1 = A^{n-1}$ і знаменником $q = -\frac{B}{A}$, маємо

$$A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - \cdots - AB^{n-2} + B^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{A^n + B^n}{A+B}.$$

Тому для доведення першої частини достатньо показати, що число $A+B$ націло ділиться на 9.

Оскільки всі цифри п'ятицифрових чисел A та B є різними і всього різних цифр є 10, то у десятковому записі цих чисел зустрічається рівно по одному разу кожна цифра від 0 до 9. Тому сума цифр S чисел A та B дорівнює

$$S = 0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45.$$

Позначимо через S_A і S_B суми цифр чисел A та B відповідно. зрозуміло, що

$$S_A + S_B = S = 45.$$

Оскільки всі числа $10-1$, $100-1$, $1000-1$ і $10000-1$ діляться націло на 9, то числа $A - S_A$ та $B - S_B$ також націло діляться на 9. Справді,

$$A - S_A = \overline{abcde} - (a+b+c+d+e) = (10000-1)a + (1000-1)b + (100-1)c + (10-1)d.$$

Тому число

$$A + B = (A - S_A) + (B - S_B) + (S_B + S_A) = (A - S_A) + (B - S_B) + 45$$

націло ділиться на 9, як сума трьох чисел з такою властивістю.

Число $A^2 + B^2$ не обов'язково націло ділиться на 9. Для прикладу достатньо взяти такі числа A і B, які містять всі різні цифри, але кожне з них не ділиться на 3. Тоді добуток $2AB$ також не ділиться на 3. Тому число

$$A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB$$

не ділиться на 3, адже $(A+B)^2$ ділиться на 9.

Задача 11.5. *У квадратній таблиці розміром 9×9 розмістили n чисел 1 і n чисел -1 так, що в кожному рядку і кожному стовпці немає чисел різних знаків. Для якого найбільшого n можна це зробити?*

Розв'язання. Спочатку доведемо, що $n \leq 20$.

Назвемо рядок або стовпчик таблиці *додатним* (*від'ємним*), якщо в ньому є хоча б одна число 1 (число -1). Згідно з умовою задачі кожний рядок (стовпчик) таблиці є або додатним, або від'ємним або немає назви. Позначимо через r^+, r^-, s^+ і s^- кількість додатних і від'ємних рядків і стовпчиків відповідно. Оскільки таблиця має 9 рядків і 9 стовпчиків, то

$$r^+ + r^- \leq 9 \qquad \text{і} \qquad s^+ + s^- \leq 9.$$

Тому $r^+ + s^+ \leq 9$ або $r^- + s^- \leq 9$. Розглянемо випадок $r^+ + s^+ \leq 9$ (якщо $r^- + s^- \leq 9$, то міркуємо аналогічно). Зазначимо, що кожне із n чисел 1 записане в клітинці, яка знаходиться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика. З іншого боку, клітинок, які знаходяться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика, є $r^+ \cdot s^+$. Тому

$$n \leq r^+ \cdot s^+ = \frac{1}{4}((r^+ + s^+)^2 - (r^+ - s^+)^2).$$

Якщо $r^+ + s^+ \leq 8$, то

$$n \leq \frac{1}{4}((r^+ + s^+)^2 \leq 16.$$

Якщо ж $r^+ + s^+ = 9$, то $|r^+ - s^+| \geq 1$ (як різниця чисел різної парності) і

$$n \leq \frac{1}{4}((r^+ + s^+)^2 - (r^+ - s^+)^2) \leq \frac{1}{4}(9^2 - 1) = 20.$$

Залишилось навести приклад розташування двадцяти чисел 1 і двадцяти чисел -1. Одним з таких прикладів є такий: у верхньому лівому прямокутнику розміром 5×4 записуємо числа 1, а у нижньому правому прямокутнику розміром 4×5 записуємо числа -1.

Відповідь: $n = 20$.