ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики

2022-2023 н.р.

Умови задач та вказівки до розв’язання

6 клас

Задача 6-1. *Андрійко проводить кожного дня* $2\frac{7}{12}$ *години, граючи на комп’ютері. Скільки часу присвятив Андрійко комп’ютерним іграм протягом жовтня?*

Вказівки. У жовтні 31 день, тому Андрійко витратив $2\frac{7}{12}\cdot 31=\frac{961}{12}=80\frac{1}{12}$ години, тобто, 80 годин та 5хвилин на комп’ютерні ігри.

Відповідь: 80 годин 5хвилин

========================

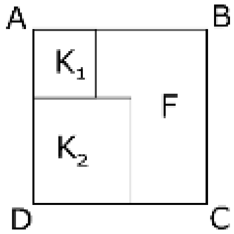
Задача 6-2. *У дядечка Василя і тітоньки Надії троє дітей. Андрійкові та Богдану разом 19 років, Андрійкові та Оленці разом 14 років, а молодшим разом 7 років. Скільки років кожному з дітей дядечка Василя і тітоньки Надії? Поясніть свою відповідь.*

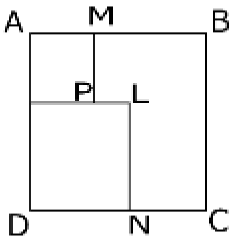
Вказівки. З умови задачі випливає, що молодші діти - це Богдан та Оленка, причому Богдан старший від Оленки на 5 років, а разом їм 7 років. Тоді, якщо до віку Оленки додати 5 і ще раз вік Оленки, ми отримаємо 7. Отже, Оленці рік, а Богдану - 6. Тоді Андрійкові, відповідно, 13 років.

Відповідь: 13 років, 6 років і 1 рік.

========================

Задача 6-3. *Периметр квадрата ABCD дорівнює 1600 міліметрів, а периметр квадрата* K_1 *- 5,6 дециметрів. Чому дорівнює периметр фігури F, якщо фігура* K_2 *- це квадрат?(малюнок праворуч)*





Вказівки. Сторона квадрата ABCD дорівнює 400 міліметрів, а сторона квадрата K_1 дорівнює 140 міліметрів. Тоді сторона квадрата K_2 становить 260 міліметрів. Крім того, $MB=AB-AM=260$мм. Позначимо вершини фігури F (малюнок ліворуч) через MBCNLP. Тоді периметр фігури F

$$P_F=(MP+LN)+BC+(PL+NC)+MB=2BC+2MB=$$

$$=2\cdot 400+2\cdot 260=1320 \text{ мм.}$$

Відповідь: 1320 мм.

========================

Задача 6-4. *Дядечко Василь має мотузку довжиною 100 см, з якої він збирається вирізати 6 шматків довжиною 1,2,4,10,17,24 і 40 см. Чи може тітонька Надія розрізати мотузку на дві частини (не обов’язково цілої довжини) так, щоб дядечко Василь не зміг вирізати потрібні йому 7 шматків? Не забудьте пояснити свою відповідь.*

Вказівки.

Нехай тітонька Надія розрізала мотузку в місці, позначеному крапкою на малюнку. Тоді хоча б один з двох шматків мотузки більший, ніж 40 см, і з нього дядечко Василь може вирізати шматок довжиною 40. Залишаються два шматки мотузки загальною довжиною $100 - 40 = 60$ см. Тоді хоча б один з цих двох шматків довший, ніж 24 см, і з нього дядечко Василь може вирізати шматок довжиною 24 см. Залишаються два шматки мотузки загальною довжиною $60 - 24 = 36$ см. Тепер хоча б один з цих двох шматків довший, ніж 17 см і з нього дядечко Василь може вирізати шматок довжиною 17. Залишаються два шматки мотузки загальною довжиною $36 - 17 = 19$ см. Зрозуміло, що якщо дірка знаходиться рівно посередині, тобто, обидва шматки мають довжину 9,5 см, то дядечко Василь не зможе відрізати шматок мотузки довжиною 10 см. Отже, тітонька Надія повинна розрізати мотузку на дві частини довжиною 9,5 см та 90,5 см.

Відповідь: Так, може, на частини довжиною 9,5 см та 90,5 см.

========================

7 клас

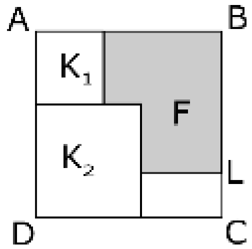
Задача 7-1. *До новорічних свят дядечко Василь важив 91,5 кг, а тітонька Надія 72,4 кг. На скільки кілограмів змінилася сума їхніх ваг після новорічних свят, якщо дядечко Василь став важчим на $\frac{2}{61}$ своєї попередньої ваги, а тітонька Надія схудла на 0,05% тонни?*

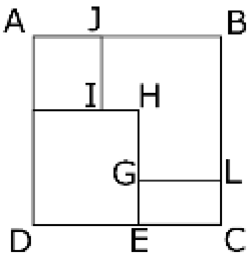
Вказівки. Вага дядечка Василя після новорічних свят збільшилася на $\frac{2}{61} \cdot \frac{183}{2} = 3$ кг, а вага тітоньки Надії після свят зменшилася на $\frac{0{,}05}{100} \cdot 1000 = 0{,}5$ кг. Отже, їхня сумарна вага збільшилася на 2,5 кг.

Відповідь: Збільшилася на 2,5 кг.

========================

Задача 7-2. *Периметр квадрата ABCD дорівнює 16000 міліметрів, а периметр квадрата K_1 - 5,6 дециметрів. Чому дорівнює периметр фігури F, якщо фігура K_2 - це квадрат, а довжина CL — 10 сантиметрів?*





Вказівки. Позначимо вершини фігури F, як на малюнку ліворуч. Сторона квадрата ABCD дорівнює 4000 мм, а сторона квадрата K_1 - 140 мм. Крім того, $BL = BC - LC = 3900$ мм, а $JB = AB - AJ = 3860$ мм. Знайдемо периметр фігури F:

$$P_F = (JI + HG) + BL + (IH + GL) + JB = 2BL + 2JB =$$
$$= 2 \cdot 3900 + 2 \cdot 3860 = 15\,520 \text{ мм.}$$

Відповідь: 15 520 мм.

========================

Задача 7-3. *Дядечко Василь має мотузку довжиною 150 см, з якої він збирається вирізати 8 шматків довжиною 1,2,3,5,12,26,39 і 60 см. Чи може тітонька Надія розрізати мотузку на дві частини (не обов'язково цілої довжини) так, щоб дядечко Василь не зміг вирізати потрібні йому 8 шматків? Не забудьте пояснити свою відповідь.*

Вказівки. 

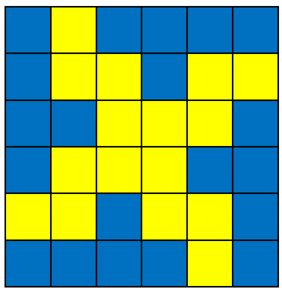
Нехай тітонька Надія розрізала мотузку в місці, позначеному крапкою на малюнку. Тоді хоча б один з двох шматків мотузки більший, ніж 60 см, і з нього дядечко Василь може відрізати шматок довжиною 60. Залишаються два шматки мотузки загальною довжиною $150 - 60 = 90$ см. Тоді хоча б один з цих двох шматків довший, ніж 39 см, і з нього дядечко Василь може вирізати шматок довжиною 39 см. Залишаються два шматки мотузки загальною довжиною $90 - 39 = 51$ см. Зрозуміло, що якщо дірка знаходиться рівно посередині, тобто, обидва шматки мають довжину 25,5 см, то дядечко Василь не зможе відрізати шматок мотузки довжиною 26 см. Отже, тітонька Надія повинна розрізати мотузку на дві частини довжиною 25,5 см та 124,5 см.

Відповідь: Так, може, на частини довжиною 25,5 см та 124,5 см.

========================

Задача 7-4. *Аліса розфарбовує листочок в клітинку* 6×6 *двома кольорами завжди* ***гарно*** *- тобто так, що кожна клітинка листочка має сусідню за стороною клітинку такого ж кольору. Злий чарівник Оскар може перефарбувати один рядок чи один стовпчик на листочку так, що колір кожної клітинки змінюється на протилежний. Придумайте приклад гарного розфарбування, яке при перефарбуванні Оскаром будь якого рядка чи стовпчика перестає бути гарним.*

Вказівки. Один з прикладів такого розфарбування:



8 клас

Задача 8-1. *На пошиття однієї мантії та чотирьох магістерських шапочок професорка Макґонеґел витратила 9 метрів чарівної тканини. Відпочивши, вона пошила ще три такі мантії та вісім таких самих шапочок і витратила на це 21 метр чарівної тканини. Скільки метрів чарівної тканини витратила професорка Макґонеґел на кожну мантію та кожну шапочку окремо?*

Вказівки. Позначимо через x кількість метрів тканини, витрачені на пошиття однієї мантії, а через y - кількість метрів тканини, витрачені на пошиття однієї шапочки. Складемо систему рівнянь

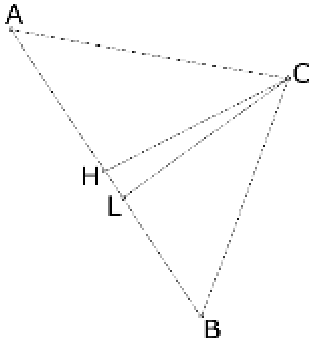
$$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x + 8y = 21, \end{cases}$$

розв’язавши яку, одержуємо $x = 3$, $y = 1{,}5$.

Відповідь: 3 метри на мантію і 1,5 метри на шапочку.

========================

Задача 8-2. *Кут A в трикутнику ABC дорівнює $49°$, а кут B дорівнює $71°$. Знайдіть кут між висотою та бісектрисою трикутника, проведеними з вершини C.*

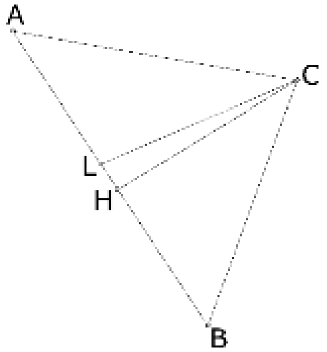


Вказівки. Розглянемо наступне розташування бісектриси та висоти (малюнок праворуч). Нехай CH —висота трикутника ABC, а CL —бісектриса кута C. Тоді

$$\angle ACH + \angle HCL = \angle LCB = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(180° - 49° - 71°) = 30°.$$

Звідси

$$\angle HCL = 30° - \angle ACH = 30° - (90° - 49°) = -11°,$$



Отже, точка H належить відрізку BL (малюнок ліворуч). Тоді

$$\angle ACL = \angle HCL + \angle HCB = \frac{1}{2}\angle ACB = 30°,$$

звідки $\angle HCL = 30° - \angle BCH = 30° - (90° - 71°) = 11°$.

Відповідь: $11°$.

Задача 8-3. *Ширина і довжина прямокутної коробки дорівнюють по 1 см, об'єм дорівнює 2022* см^3*, а висота коробки має вигляд* $(x^3 + 333x^2 - 334x)$ *см. Знайдіть значення x, якщо відомо, що воно є цілим числом.*

Вказівки. З формули для об'єму маємо рівняння

$$x^3 + 333x^2 - 334x = 2022.$$

Розкладемо ліву частину на множники:

$$x^3 + 333x^2 - 334x = x(x^2 + 334x - x - 334) = x(x-1)(x+334).$$

Тоді

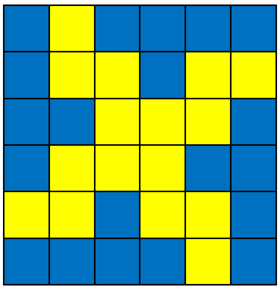
$$(x-1)x(x+334) = 2 \cdot 3 \cdot 337.$$

Врахувавши, що x — ціле додатне, отримуємо, що $x - 1 = 2, x = 3, x + 334 = 337$.

Відповідь: $x = 3$.

Задача 8-4. *Аліса розфарбовує листочок в клітинку 6×6 двома кольорами завжди* ***гарно*** *- тобто так, що кожна клітинка листочка має сусідню за стороною клітинку такого ж кольору. Злий чарівник Оскар може перефарбувати один рядок чи один стовпчик на листочку так, що колір кожної клітинки змінюється на протилежний. Придумайте приклад гарного розфарбування, яке при перефарбуванні Оскаром будь якого рядка чи стовпчика перестає бути гарним.*

Вказівки. Один з прикладів такого розфарбування:



=====================

Задача 8-5. *З перших десяти натуральних чисел 1, 2, … , 10 вибрали п'ять чисел так, що кожне з вибраних чисел не ділиться націло на кожне з решти чотирьох вибраних чисел. Чи може серед вибраних чисел бути число 3?*

Вказівки. Нехай серед вибраних п'яти чисел є трійка. Тоді жодне з решти чотирьох вибраних чисел не повинно ділитися націло на 3, тобто, серед них немає чисел 6 і 9. Також зрозуміло, що серед вибраних чисел немає 1. Отже, решта чотири вибрані числа можуть бути 2,4,5,7,8,10. Якщо вибрана двійка, то з решти трьох чисел вже не можуть бути вибрані 4,8 і 10, а тоді залишається тільки два числа. Отже, двійка теж не може бути вибрана. Якщо вибране число 4, то не може бути вибраним число 8, а тоді залишається тільки варіант 5,7,10, що суперечить умові задачі, оскільки 10 кратне 5. Аналогічно у випадку, коли вибране число 5. Таким чином, залишаються тільки 7,8 і 10, що разом з обраним числом 3 дає тільки чотири числа, звідки випливає суперечність.

Відповідь: ні, не може.

==================

9 клас

Задача 9-1. *Встановіть, яке з наступних двох чисел є більшим:* $2022^{2022} \cdot 2021^{2021}$ *чи* $2022^{2021} \cdot 2021^{2022}$*?*

Вказівки. Позначимо $A = 2022^{2022} \cdot 2021^{2021}$, $B = 2022^{2021} \cdot 2021^{2022}$ і розглянемо відношення

$$\frac{A}{B} = \frac{2022^{2022} \cdot 2021^{2021}}{2022^{2021} \cdot 2021^{2022}} = \frac{2022}{2021} > 1.$$

Отже, $A > B$.

Відповідь: перше число більше.

==================

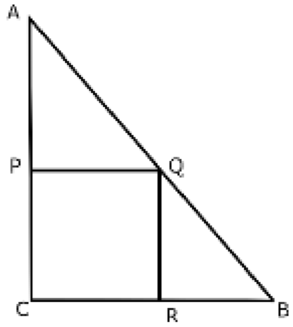
Задача 9-2. *Розв'яжіть рівняння*

$$(x^2 + x)^2 - x^2 - 2 = x.$$

Вказівки. Запишемо рівняння у вигляді $(x^2 + x)^2 - (x^2 + x) - 2 = 0$, і зробимо заміну $t = x^2 + x$. Тоді $t^2 - t - 2 = 0$, звідки $t = -1$ і $t = 2$. Маємо тепер, що $x^2 + x + 1 = 0$ або $x^2 + x - 2 = 0$. Перше рівняння розв'язків не має, а з другого $x = 1$ і $x = -2$.

Відповідь: $x = 1$ і $x = -2$.

==================



Задача 9-3. *На гіпотенузі AB та катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC вибрано точки Q, P і R так, що чотирикутник $CPQR$ є квадратом. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $AP = 3BR$.*

Вказівки. Зауважимо, що $\Delta APQ \sim \Delta QRB$. Тому $\frac{PQ}{AP} = \frac{BR}{QR}$, звідки $\frac{PQ}{3BR} = \frac{BR}{PQ}$. Тоді

$$tg\angle ABC = \frac{QR}{BR} = \frac{PQ}{RB} = \sqrt{3}.$$

Отже, $\angle ABC = 60°$, а $\angle CAB = 30°$.

Відповідь: $30°, 60°, 90°$.

==================

Задача 9-4. *Серед чисел вигляду $n^4 + 4$, де n – довільне натуральне число, знайдіть всі прості числа.*

Вказівки. Запишемо вираз у вигляді

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

Тоді вираз буде простим числом тоді і тільки тоді, коли одна з дужок дорівнює 1. Оскільки n - натуральне, то $n^2 + 2n + 2 > n^2 - 2n + 2$, тому $n^2 - 2n + 2 = 1$, звідки $n = 1$. Тоді $n^4 + 4 = 5$.

Відповідь: 5.

==================

Задача 9-5. *З перших десяти натуральних чисел 1, 2, … , 10 вибрали п'ять чисел так, що кожне з вибраних чисел не ділиться націло на кожне з решти чотирьох вибраних чисел. Чи може серед вибраних чисел бути число 3?*

Вказівки. Нехай серед вибраних п'яти чисел є трійка. Тоді жодне з решти чотирьох вибраних чисел не повинно ділитися націло на 3, тобто, серед них немає чисел 6 і 9. Також зрозуміло, що серед вибраних чисел немає 1. Отже, решта чотири вибрані числа можуть бути 2,4,5,7,8,10. Якщо вибрана двійка, то з решти трьох чисел вже не можуть бути вибрані 4,8 і 10, а тоді залишається тільки два числа. Отже, двійка теж не може бути вибрана. Якщо вибране число 4, то не може бути вибраним число 8, а тоді залишається тільки варіант 5,7,10, що суперечить умові задачі, оскільки 10 кратне 5. Аналогічно у випадку, коли вибране число 5. Таким чином, залишаються тільки 7,8 і 10, що разом з обраним числом 3 дає тільки чотири числа, звідки випливає суперечність.

Відповідь: ні, не може.

---

10 клас

Задача 10-1. *Розв'яжіть рівняння*

$$x^4 + 331x^2 = 2022.$$

Вказівки. Перепишемо рівняння у вигляді

$$x^4 + 331x^2 - 2022 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 337x^2 - 6x^2 - 6 \cdot 337 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 337)(x^2 - 6) = 0.$$

Тоді $x^2 = 6$, звідки $x = \pm\sqrt{6}$.

Відповідь: $x = \pm\sqrt{6}$.

================

Задача 10-2. *Доведіть, що для довільних натуральних чисел* n *і* m *виконується нерівність*

$$n^n \cdot m^m \geq n^m \cdot m^n.$$

Вказівки. Позначимо $A = n^n \cdot m^m$, $B = n^m \cdot m^n$ і розглянемо відношення

$$\frac{A}{B} = \frac{n^n \cdot m^m}{n^m \cdot m^n} = \frac{n^{n-m}}{m^{n-m}} = \left(\frac{n}{m}\right)^{n-m}.$$

Якщо $n \geq m$, то $\left(\frac{n}{m}\right)^{n-m} \geq 1$ і $\frac{A}{B} \geq 1$. Отже, в цьому випадку $A \geq B$. Якщо ж $n < m$, то $\left(\frac{n}{m}\right)^{n-m} = \left(\frac{m}{n}\right)^{m-n} > 1$, звідки $\frac{A}{B} > 1$. В цьому випадку $A > B$.

=================

Задача 10-3. *Серед чисел вигляду* $n^4 + 4$, *де* n *– довільне натуральне число, знайдіть всі прості числа.*

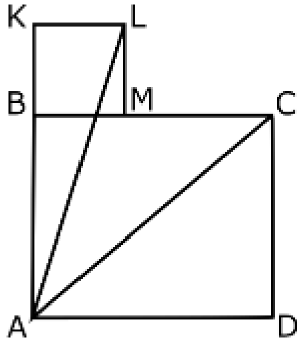
Вказівки. Запишемо вираз у вигляді

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

Тоді вираз буде простим числом тоді і тільки тоді, коли одна з дужок дорівнює 1. Оскільки n - натуральне, то $n^2 + 2n + 2 > n^2 - 2n + 2$, тому $n^2 - 2n + 2 = 1$, звідки $n = 1$. Тоді $n^4 + 4 = 5$.

Відповідь: 5.

Задача 10-4. *На стороні* BC *квадрата* $ABCD$ *вибрали точку* M *і побудували квадрат* $BKLM$. *Виявилося, що* $AC = AL$. *Знайдіть* $\angle CAL$.



Вказівки. Позначимо $AB = a$, $BK = b$. За теоремою Піфагора для ΔADC, $AC = a\sqrt{2}$. За теоремою Піфагора для ΔAKL та з рівності $AC = AL$ маємо

$$(a + b)^2 + b^2 = AL^2 = AC^2 = 2a^2,$$

звідки $2b^2 + 2ab - a^2 = 0$. Поділивши обидві частини на $a^2 \neq 0$ і замінивши $t = \frac{b}{a}$, одержимо $2t^2 + 2t - 1 = 0$, звідки

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

За теоремою Піфагора для ΔLMC

$$LC^2 = b^2 + (a - b)^2 = a^2 - 2ab + 2b^2.$$

За теоремою косинусів для ΔLAC:

$$LC^2 = AL^2 + AC^2 - 2AL \cdot AC \cdot \cos\angle CAL.$$

Тоді

$$a^2 - 2ab + 2b^2 = 4a^2 - 4a^2 \cdot cos\angle CA.$$

Підставимо в останню рівність $b = a \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ і отримаємо, що

$$\cos\angle CAL = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким чином, $\angle CAL = 30°$.

Відповідь: $30°$

===============

Задача 10-5. *З перших двадцяти натуральних чисел 1, 2, … , 20 вибрали десять чисел так, що кожне з вибраних чисел не ділиться націло на кожне з решти дев'яти вибраних чисел. Чи може серед вибраних чисел бути число 3?*

Вказівки. Нехай серед вибраних десяти чисел є трійка. Тоді жодне з решти чотирьох вибраних чисел не повинно ділитися націло на 3, тобто, серед них немає чисел 6, 9, 12, 15 і 18. Також зрозуміло, що серед вибраних чисел немає 1. Отже, решта дев'ять вибраних чисел належать до множини $\{2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20\}$. Якщо вибрана двійка, то з решти восьми чисел вже не можуть бути вибрані парні числа, а тоді залишається тільки шість непарних. Отже, двійка теж не може бути вибрана. Якщо вибране число 4, то числа 8,16,20 не увійдуть у вибрані, і залишаться для вибору числа 5,7,10,11,13,14,17,19. Їх є дев'ять, тому у вибрані вісім увійде хоча б одна з пар (5,10) або (7,14). Отримана суперечність показує, що початкове припущення не вірне, і число 3 не може бути серед вибраних.

Відповідь: ні, не може.

11 клас

Задача 11-1. *Розв'яжіть рівняння*

$$x^4 + 331x^2 = 2022.$$

Вказівки. Перепишемо рівняння у вигляді

$$x^4 + 331x^2 - 2022 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 337x^2 - 6x^2 - 6 \cdot 337 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 337)(x^2 - 6) = 0.$$

Тоді $x^2 = 6$, звідки $x = \pm\sqrt{6}$.

Відповідь: $x = \pm\sqrt{6}$.

Задача 11-2. *Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел a і b виконується нерівність*

$$a^a \cdot b^b \geq a^b \cdot b^a.$$

Вказівки. Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $a > b$. Поділимо обидва вирази на $a^b \cdot b^a$ і одержимо таку нерівність

$$(\frac{a}{b})^{a-b} \geq 1.$$

Оскільки основа $c = \frac{a}{b}$ більша від одиниці, то показникова функція $y = c^x$ зростає і тому

$$c^{a-b} > c^0 = 1.$$

Задача 11-3. *Знайдіть всі цілі числа x і y, які задовольняють рівність*

$$y^3 - y = \cos(\pi x) + 5.$$

Вказівки. Оскільки $y^3 - y = (y-1)y(y+1)$, то ціле число $y^3 - y$ ділиться на 3, як добуток трьох послідовних цілих чисел. Тому число $\cos(\pi x) + 5$ є цілим і ділиться на 3. Беручи до уваги, що

$$|\cos(\pi x)| \leq 1,$$

одержимо, що

$$4 \leq \cos(\pi x) + 5 \leq 6.$$

Отже, $\cos(\pi x) = 1$, тобто $x = 2n, n \in \mathbb{Z}$. Залишилось розв'язати в цілих числах рівняння

$$(y-1)y(y+1) = 6.$$

Число y повинно бути дільником числа 6. Перебираючи всі дільники, одержуємо, що $y = 2$.

Відповідь. $x = 2n$, де $n \in \mathbb{Z}$, і $y = 2$.

Задача 11-4. *Натуральне число n має рівно два різні непарні дільники. Доведіть, що серед довільних трьох дільників числа n обов'язково знайдуться два дільники такі, що один з них націло ділиться на інший.*

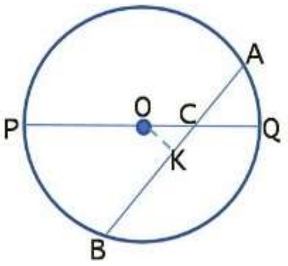
Вказівки. Зауважимо, що один з двох непарних дільників числа n є число 1. Оскільки непарне число може мати лише непарні дільники, то інший непарний дільник числа n є непарним простим чмслом. Позначимо його через p. Розкладемо число n на прості множники і одержимо, що

$$\boldsymbol{n = p \cdot 2^k},$$

де k – невід‘ємне ціле число.

Довільні три дільники числа n розділимо на дві групи: ті, що діляться націло на число p, і ті, що не діляться націло на число p. Виберемо з цих трьох дільників два d_1 і d_2, які попадають в одну групу, наприклад в першу. Тоді $d_1 = p \cdot 2^{k_1}$ і $d_2 = p \cdot 2^{k_2}$, причому можемо вважати, що $k_1 \geq k_2$. Отже, d_1 націло ділиться на d_2.

Задача 11-5. *PQ – діаметр кола з радіусом 1. Хорда AB перетинає діаметр PQ в точці C під кутом 45°. Доведіть, що значення виразу $AC^2 + BC^2$ не залежить від положення точки C, і знайдіть це значення.*



Вказівки. З центра кола O опустимо перпендикуляр OK на хорду AB. Тоді $AK = BK$ та $CK = OK$, бо трикутник COK – рівнобедрений, як прямокутний трикутник з кутом 45°. Тепер маємо: $AC^2 + BC^2 = (AK - CK)^2 + (BK + CK)^2 = AK^2 + BK^2 + 2CK^2 = 2(AK^2 + OK^2) = 2 \cdot OA^2 = 2$.