

Все буде Україна!

Київська Мала академія наук  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

## **I етап Всеукраїнської олімпіади з математики**

### **Районна олімпіада юних математиків в місті Києві**

*Умови та розв'язання задач*

*Київ, 17 жовтня 2026 року*

*«Відважтеся мислити самостійно».  
Вольтер*

## 8 клас

**8–1.** Одноцифрове число  $a$  та двоцифрове число  $b$  задовольняють умову:  $25a = 6b$ . Чому може дорівнювати сума  $a + b$ ?

**Відповідь:** 31.

**Розв'язання.** Оскільки 25 та 6 не мають спільних дільників, то число  $a$  має бути кратним 6. Очевидно, що  $a = 6$ , тоді  $b = 25$ . Звідси випливає, що  $a + b = 31$ .

**8–2.** У прямокутнику  $ABCD$  точка  $M$  – середина відрізка  $CD$ , а  $N$  – середина відрізка  $AM$ . Знаючи, що  $AM \perp BN$ , знайдіть градусну міру  $\angle ABM$ .

**Відповідь:**  $60^\circ$ .

**Розв'язання.** Оскільки точка  $N$  – середина відрізка  $AM$  та основа висоти, то  $\triangle ABM$  – рівнобедрений, тобто  $AB = BM$  (рис. 1). Проведемо відрізок  $PM$ , де  $P$  – середина відрізка  $AB$ . Тоді  $\triangle BCM = \triangle BMP = \triangle ADM = \triangle AMP$  оскільки діагональ розбиває прямокутник на два рівних трикутника. Звідси  $AM = BM = AB$  та  $\triangle ABM$  – рівносторонній, тому  $\angle ABM = 60^\circ$ .

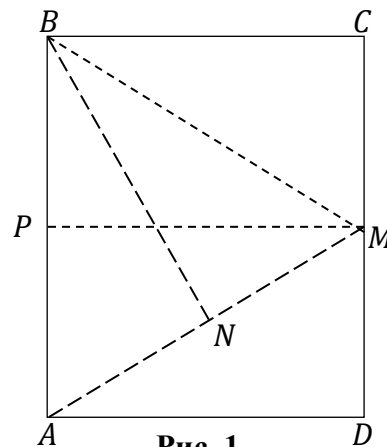


**Рис. 1**

**8–3.** Петрик розташував перші 9 натуральних чисел у клітинках таблиці  $3 \times 3$ . У центральній клітинці він записав число 8. Сума чисел у чотирьох клітинках кожного квадрата  $2 \times 2$  цієї таблиці дорівнює 23. Чому може дорівнювати сума чисел у чотирьох кутових клітинках?

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $a$ | $x$ | $b$ |
| $y$ | 8   | $z$ |
| $c$ | $t$ | $d$ |

**Рис. 2**

**Відповідь:** 14.

**Розв'язання.** Нехай числа в таблиці позначені, як на рис. 2. Якщо додати суми чисел в усіх чотирьох можливих квадратах  $2 \times 2$ , то матимемо, що ця сума з одного боку дорівнює

$$(a + b + c + d) + 2(x + y + z + t) + 8 \cdot 4,$$

а з іншого – це  $23 \cdot 4 = 92$ . Оскільки  $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ , то

$$(a + b + c + d) + (x + y + z + t) + 8 = 45 \Rightarrow (x + y + z + t) = 37 - (a + b + c + d) \Rightarrow (a + b + c + d) + 2(37 - (a + b + c + d)) = 92 - 32 = 60,$$

звідси остаточно знаходимо, що  $a + b + c + d = 74 - 60 = 14$ .

**8–4.** Відомо, що для цілих чисел  $a, b, c$  вираз  $4a + 5b - 3c$  ділиться націло на 19. Чи обов'язково і вираз  $6a - 2b + 5c$  буде ділитися на 19?

**Відповідь:** так.

**Розв'язання.** Запишемо задану умову таким чином:

$$4a + 5b - 3c = 19k \Rightarrow c = \frac{4a}{3} + \frac{5b}{3} - \frac{19k}{3},$$

тоді

$$6a - 2b + 5c = 6a - 2b + \frac{20a}{3} + \frac{25b}{3} - \frac{95k}{3} = \frac{19 \cdot 2a}{3} + \frac{19b}{3} - \frac{19 \cdot 5k}{3}.$$

Звідси випливає, що число  $3 \cdot (6a - 2b + 5c) = 19 \cdot (2a + b - 5k)$  ділиться націло на 19, а тому, оскільки 3 і 19 взаємно прості, на 19 ділиться і число  $6a - 2b + 5c$ , що й треба було довести.

**8–5.** У Петрика є квадрат  $10 \times 10$ . По черзі він випадково вибирає одну зі ста клітинок  $1 \times 1$  цього квадрата і записує в неї число. Число, яке він вписує в клітинку, завжди дорівнює загальній кількості вже заповнених клітинок у рядку та стовпці цього квадрата, де розташована дана клітинка. Тож у першій клітинці він записує число 0,

у другій клітинці – число 0 або 1, залежно від того, чи вона знаходиться в іншому рядку та іншому стовпці, чи ні, з попередньою клітинкою, і так далі. Отже, в кожній клітинці буде записане число від 0 до 18 включно. Після того, як Петрик вписав число в кожну клітинку, він додає всі записані числа. Який можливий результат цього додавання? Вкажіть усі можливі відповіді.

**Відповідь:** 900.

**Розв'язання.** Ми доведемо, що результат цього додавання завжди дорівнює 900.

У кожній клітинці запишемо ще два числа: жовтим кольором загальну кількість клітинок, які вже заповнені в рядку цього квадрата, а червоним кольором загальну кількість клітинок, які вже заповнені в стовпці цього квадрата. Число, яке записує Петрик, це жовте число плюс червоне число. Якщо ви подивитесь на жовті числа в кожному рядку, ви побачите, що отримуєте числа від 0 до 9: перша обрана клітинка отримує 0, наступний – 1 і так далі. Аналогічно, ви отримуєте червоні числа від 0 до 9 у кожному стовпці. Отже, сума жовтих чисел у рядку (і червоних чисел у стовпці) дорівнює  $0 + 1 + \dots + 9 = 45$ . Всього є 10 рядків і 10 стовпців. Отже, загальна сума завжди дорівнює  $20 \cdot 45 = 900$ .

**8–4.1.** Знайдіть усі такі пари простих чисел  $(p, q)$ , що задовольняють рівності:

$$20p + 27q = 2027.$$

**Відповідь:**  $p = 19$  та  $q = 61$ .

**Розв'язання.** Виходячи з останньої цифри просте число  $q$  має закінчуватися цифрою 1, крім того  $q \leq 75$ , таким чином вибір числа  $q$  треба робити з чисел 11, 31, 41, 61 або 71. Для кожного з цих чисел знайдемо відповідні  $p$ .

$$q = 11 \Rightarrow 20p = 2027 - 27 \cdot 11 = 1730, \text{ тому } p - \text{не ціле.}$$

$$q = 31 \Rightarrow 20p = 2027 - 27 \cdot 31 = 1190, \text{ тому } p - \text{не ціле.}$$

$$q = 41 \Rightarrow 20p = 2027 - 27 \cdot 41 = 920, \text{ тому } p = 46 - \text{не просте.}$$

$$q = 61 \Rightarrow 20p = 2027 - 27 \cdot 61 = 380, \text{ тому } p = 19 - \text{задовольняє умову.}$$

$$q = 71 \Rightarrow 20p = 2027 - 27 \cdot 71 = 110, \text{ тому } p - \text{не ціле.}$$

Таким чином  $p = 19$  та  $q = 61$  – єдиний розв'язок.

**8–5.1.** Петрик виписує на дошку набір чисел. Першим та другим числами цього набору є числа 2022 та 21 відповідно. Кожне наступне число набору дорівнює модулю різниці двох попередніх, тобто третє число – це число  $2001 = |2022 - 21|$ , четверте – це число  $1980 = |2001 - 21|$  і так далі. Під яким номером в цьому наборі вперше з'явиться число 0?

**Відповідь:** 154.

**Розв'язання.** Легко зрозуміти, що 2-ге, 5-те, 8-ме числа цього набору дорівнюють 21, доки не з'явиться менше число ніж 21. Інші числа утворюються послідовним відніманням від 2022 числа 21: 2022, 2001, 1980, 1959, ...:

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{2022}_1, \underbrace{21}_2, \underbrace{2001}_3 & = & 2022 - 21, \underbrace{1980}_4 & = & 2001 - 21, \underbrace{21}_5 & = & 2001 - 1980, \\ \underbrace{1959}_6 & = & 1980 - 21, \underbrace{1938}_7 & = & 1959 - 21, \underbrace{21}_8 & = & 1959 - 1938, \dots \end{array}$$

Таким чином останні числа набору цього циклу такі:

$$\underbrace{2022}_1, \underbrace{21}_2, \underbrace{2001}_3, \underbrace{1980}_4, \dots, \underbrace{90}_{139}, \underbrace{21}_{140}, \underbrace{69}_{141}, \underbrace{48}_{142}, \underbrace{21}_{143}, \underbrace{27}_{144}.$$

Далі просто знаходимо наступні числа набору, доки не з'явиться вперше число 0:

$$\underbrace{6}_{145}, \underbrace{21}_{146}, \underbrace{15}_{147}, \underbrace{6}_{148}, \underbrace{9}_{149}, \underbrace{3}_{150}, \underbrace{6}_{151}, \underbrace{3}_{152}, \underbrace{3}_{153}, \underbrace{0}_{154}.$$

Шуканий номер числа набору 154.

## 9 клас

**9–1.** Знайдіть усі такі пари простих чисел  $(p, q)$ , що задовольняють рівності:  

$$20p + 43q = 2026.$$

**Відповідь:**  $p = 97$  та  $q = 2$ .

**Розв'язання.** Оскільки  $43q = 2026 - 20p$ , то число  $q$ —парне і просте, а тому  $q = 2$ . Тоді  

$$20p = 2026 - 43q = 1940 \Rightarrow p = 97.$$

Оскільки  $p = 97$  – просте число, то шукана пара  $(p, q) = (97, 2)$  є шукана пара.

**9–2.** На стороні  $BC$  рівностороннього трикутника  $ABC$  вибрана точка  $N$ . На промені  $AB$  за точкою  $B$  вибрана точка  $D$ , що задовольняє умову  $CN = BD$ . На стороні  $AB$  вибрана така точка  $K$ , що відрізок  $NK \perp AB$ . Доведіть, що точка  $K$  є серединою відрізка  $AD$ .

**Розв'язання.** Виберемо на стороні  $AC$  точку  $E$  та на стороні  $AB$  точку  $M$  таким чином, щоб  $NE \parallel AB$  та  $MN \parallel AC$  (рис. 3). Тоді  $\triangle CNE$  та  $\triangle MNB$  – рівносторонні, бо мають усі відповідні кути рівними кутам  $\triangle ABC$ , тобто по  $60^\circ$  кожний. Відрізок  $NK$  є висотою, а тому й медіаною  $\triangle MNB$ , тому  $MK = KB$ . Крім того, оскільки за побудовою  $AMNE$  – паралелограм, то маємо такі рівності:  $BD = CN = AM$ , але тоді  $AM + MK = KB + BD$ , що й завершує доведення.

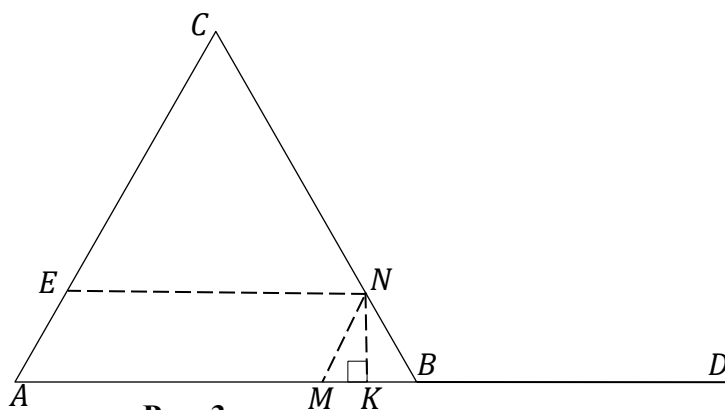


**Рис. 3**

**9–3.** Для додатних чисел  $a, b, c, d$  доведіть, що принаймні одне з трьох рівнянь:  

$$ax^2 + b(d + 2)x + c = 0, bx^2 + c(d + 2)x + a = 0, cx^2 + a(d + 2)x + b = 0$$
має дійсний корінь.

**Розв'язання.** Зробимо заміну  $t = d + 2 > 2$ . Припустимо, методом від супротивного, що жодне з трьох рівнянь коренів не має, тоді дискримінант кожного з рівнянь є від'ємним, тому

$$b^2t^2 < 4ac, c^2t^2 < 4ba, a^2t^2 < 4cb.$$

Перемножимо ці нерівності і матимемо, що  $a^2b^2c^2t^6 < 64a^2b^2c^2 \Rightarrow t^6 < 64 \Rightarrow t < 2$ . Одержана суперечність завершує доведення.

**9–4.** Знайдіть усі пари натуральних чисел  $(x, y)$ , що задовольняють рівності:  

$$x^3 - y^3 = 987654.$$

**Відповідь:** таких чисел не існує.

**Розв'язання.** Припустимо, що шукані числа існують. Нехай тоді

$$x - y = a, x^2 + xy + y^2 = b, ab = 987654.$$

З цих двох рівностей отримуємо, що  $x = a + y$  та

$$\begin{aligned} b &= x^2 + xy + y^2 = (a + y)^2 + (a + y)y + y^2 = a^2 + 2ay + y^2 + ay + y^2 + y^2 = \\ &= a^2 + 3ay + 3y^2 \Rightarrow b - a^2 = 3ay + 3y^2. \end{aligned}$$

З останньої рівності числа  $a$  та  $b$  одночасно або діляться на 3, або ні. З умови  $ab = 987654 : 3$  випливає, що вони мають ділитися на 3, але тоді  $ab : 9$ , що суперечить умові, бо 987654 не ділиться на 9. Одержана суперечність показує, що таких чисел не існує.

**9–5.** У кожне поле квадратної таблиці розміром  $n \times n$  записане деяке число так, що сума всіх записаних чисел додатна. Доведіть, що стовпці таблиці можна переставити

так, щоб сума чисел принаймні на одній із діагоналей таблиці стала додатною.

**Розв'язання.** Зафарбуємо клітинки таблиці у  $n$  кольорів, як це показано на рис. 4. По діагоналі розташовані усі клітинки кольору 1. Переставимо перший стовпчик на останнє місце, тоді по діагоналі будуть розташовані усі клітинки з кольором 2 (рис. 5). Знову переставимо перший стовпчик на останнє місце і по діагоналі стануть клітинки з кольором 3 (рис. 6). Таким чином зробивши усі аналогічні кроки побачимо, що по діагоналі будуть усі клітинки кожного з кольорів. Якщо кожного разу сума чисел по діагоналі не додатна, то і сума усіх чисел таблиці не додатна. Одержана суперечність показує, що в якійсь момент по діагоналі стояли числа, сума яких додатна.

|               |     |     |     |     |     |  |               |     |     |     |     |     |  |               |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|--|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|--|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1             | 2   | 3   | ... | ... | n   |  | 2             | 3   | ... | ... | n   | 1   |  | 3             | ... | ... | n   | 1   | 2   |
| n             | 1   | 2   | 3   | ... | n-1 |  | 1             | 2   | 3   | ... | n-1 | n   |  | 2             | 3   | ... | n-1 | n   | 1   |
| n-1           | n   | 1   | 2   | 3   | ... |  | n             | 1   | 2   | 3   | ... | n-1 |  | 1             | 2   | 3   | ... | n-1 | n   |
| ...           | ... | ... | ... | ... | ... |  | ...           | ... | ... | ... | ... | ... |  | ...           | ... | ... | ... | ... | ... |
| 3             | ... | ... | ... | 1   | 2   |  | ...           | ... | ... | 1   | 2   | 3   |  | ...           | ... | 1   | 2   | 3   | ... |
| 2             | 3   | ... | ... | ... | n   |  | 3             | ... | ... | ... | n   | 2   |  | ...           | ... | ... | n   | 2   | 3   |
| <b>Рис. 4</b> |     |     |     |     |     |  | <b>Рис. 5</b> |     |     |     |     |     |  | <b>Рис. 6</b> |     |     |     |     |     |

**9–4.1.** Знайдіть усі двоцифрові числа  $\overline{ab}$ , для яких натуральним числом є значення виразу  $\sqrt{ab} + \sqrt{b}$ .

**Відповідь:** 14, 34.

**Розв'язання.** Нехай цей вираз дорівнює деякому натуральному числу  $n$ , тобто

$$\sqrt{ab} + \sqrt{b} = n \Rightarrow \sqrt{b} = n^2 - \overline{ab} - \text{ціле число.}$$

Таким чином, цифра  $b$  має бути такою, корінь з якої є цілим числом, тобто  $b = 0, 1, 4, 9$ . Залишається розглянути ці випадки.

Випадок 1.  $b = 0$ , тоді  $\sqrt{10a}$  не може бути натуральним числом ні при якому  $a$ .

Випадок 2.  $b = 1$ , тоді  $\sqrt{10a + 1 + 1} = \sqrt{a2}$  не може бути натуральним числом ні при якому  $a$ .

Випадок 3.  $b = 4$ , тоді  $\sqrt{10a + 4 + 2} = \sqrt{a6}$  може бути натуральним числом при  $a = 1$  та  $a = 3$ .

Випадок 4.  $b = 9$ , тоді  $\sqrt{10a + 9 + 3} = \sqrt{A2}$  не може бути натуральним числом ні при якому  $a$ .

**9–5.1.** Дано взаємно прості натуральні числа  $n$  та  $m$ . У кожній клітинці таблиці з  $n$  рядками та  $m$  стовпцями записане натуральне число. Відомо, що сума чисел у кожному рядку дорівнює 196, а сума чисел у кожному стовпці дорівнює 20. Які значення може приймати сума  $m + n$ ?

**Відповідь:** 49.

**Розв'язання.** Сума чисел у таблиці дорівнює  $196n = 20m \Leftrightarrow 49n = 5m$ . Оскільки  $m$  та  $n$  є взаємно простими числами, то  $n = 5$  та  $m = 49$ . Звідки маємо, що  $m + n = 49$ .

## 10 клас

**10–1.** Квиток на футбол коштує 240 грн, а зі знижкою – 150 грн. На гру «Динамо» – «Шахтар» продали  $x$  квитків обох типів на загальну суму 4440 грн. Яке найменше значення може приймати величина  $x$ ?

**Відповідь:** 20.

**Розв'язання.** Нехай купили  $a$  повних квитків та  $b$  квитків зі знижкою. Тоді  $240a + 150b = 4440$  та  $x = a + b$ . Тоді  $24a + 15b = 444$ . Найменшу кількість квитків  $x$  можна купити за умови, що найменше можливе значення приймає величина  $b$ , оскільки  $24x = 24(a + b) = 444 + 9b$ . Підберемо найменше значення  $b$ , для якого справджується рівність:  $24a + 15b = 444$ .

Зрозуміло, що  $b$  – парне число.

При  $b = 0$  маємо, що  $a$  – не ціле число, варіант неможливий.

При  $b = 2$  маємо, що  $a$  – не ціле число, варіант неможливий.

При  $b = 4$  маємо, що  $a = 16$ . Тобто цей варіант – шуканий, сумарно купили  $4 + 16 = 20$  квитків.

**10–2.** У чотирикутнику  $ABCD$  середини сторін  $AB$  та  $CD$  позначимо через  $E$  та  $F$  відповідно. Відрізки  $AF$ ,  $BF$ ,  $CE$ ,  $DE$  та  $EF$  розділяють чотирикутник  $ABCD$  на 8 трикутників, площі яких ми позначимо  $a, b, c, d$  та  $p, q, r, s$ , як це показано на рис. 7. Доведіть, що справджується рівність:  $a + r = c + p$ .

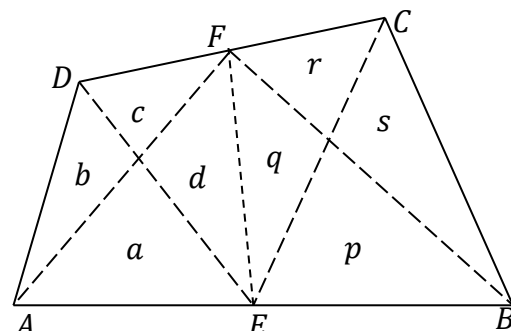


**Рис. 7**

**Розв'язання.** Зрозуміло, що справджуються така рівність:  $a + d = p + q$ , оскільки це рівносильне тому, що  $S_{AEF} = S_{BEF}$ . А це в свою чергу випливає з того, що ці трикутники мають спільну висоту та рівні основи  $AE = EB$ . Аналогічно  $S_{CEF} = S_{DEF}$ , звідки  $c + d = r + q$ . Віднімемо одержані дві рівності:

$$(a + d) - (c + d) = (p + q) - (r + q) \Rightarrow a - c = p - r \Rightarrow a + r = p + c,$$

що доводить першу рівність.

**10–3.** Сума семи натуральних чисел дорівнює 111. Яке найбільше можливе значення найбільшого спільного дільника цих семи чисел?

**Відповідь:** 3.

**Розв'язання.** Якщо кожне з семи чисел ділиться на число  $d$ , то на  $d$  ділиться і їхня сума, тобто  $111 = 3 \cdot 37 : d$ . Якщо припустити, що  $d = 37$  або  $d = 111$ , то сума цих семи чисел більше 111, що неможливо. Таким чином найбільше можливе значення найбільшого спільного дільника – це  $d = 3$ . Приклад шуканих семи чисел може бути таким: 3, 3, 3, 3, 3, 3 та 93.

**10–4.** Функція  $f: R \rightarrow R$  для кожного дійсного  $x$  задовольняє умову  $f(f(x)) = 4x + 1$ . Скільки коренів може мати рівняння:  $f(x) = x$ ? Вкажіть усі можливі відповіді.

**Відповідь:** 1.

**Розв'язання.** Припустимо, що  $x_0$  задовольняє умову  $x = f(x)$ , то

$$x_0 = f(x_0) = f(f(x_0)) = 4x_0 + 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{3}.$$

З іншого боку:

$$\begin{aligned} f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right) &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) &= f\left(f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right) = 4f\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

що й завершує доведення.

**10–5.** У кожну комірку  $1 \times 1$  квадрата  $100 \times 100$  записане деяке число. У верхньому рядку зліва направо записані послідовно числа  $0, 1, 2, \dots, 99$ . Аналогічно, у лівому стовпчику зверху до низу записані послідовно числа  $0, 1, 2, \dots, 99$ . Усі числа, що записані в таблицю, задовольняють умові: сума чотирьох чисел у кожному з квадратів  $2 \times 2$  дорівнює 20. Яке число записане у правій нижній комірці?

**Відповідь:** –178.

**Розв'язання.** Пофарбуємо квадрат в шаховому порядку – ліва верхня та права нижня комірки при

цьому фарбуванні будуть білі, а ліва нижня та права верхня – чорні. Розглянемо усі  $99 \cdot 99 = 9801$  квадратів  $2 \times 2$ , які назвемо блоками. З цих блоків 4901 мають ліву верхню комірку білою, а 4900 – чорною. Відповідно до цього блоки будемо називати білими та чорними. Додаймо чотири числа кожного з 4901 білих блоків, а далі знайдемо суму усіх отриманих чисел та позначимо її через  $W$ . Аналогічно позначимо суму чисел у чорних блоках через  $Z$ . Оскільки чорних блоків рівно на 1 менше, тому  $W - Z = 20$ .

Подивимось, скільки разів число у кожній комірці рахується в певних сумах. Число у кожній кутовій комірці рахується тільки в білих блоках і рівно 1 раз. Кожне інше число на межі рахується рівно 1 раз у білих блоках та рівно 1 раз – у чорних. Усі інші комірки – внутрішні – рахуються рівно 2 рази у білих блоках та рівно 2 рази – у чорних. Таким чином у виразі  $W - Z$  після скорочення залишиться лише сума чотирьох кутових комірок. Позначимо число у правій кутовій комірці через  $x$ , тоді маємо рівність:

$$W - Z = 0 + 99 + 99 + x = 20 \Rightarrow x = -178.$$

**10–4.1.** Для довільних дійсних чисел  $a, b, c$  з'ясуйте, яке найменше значення може приймати вираз

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24?$$

**Відповідь:** 20 при  $a = 4, b = 2, c = 1$ .

**Розв'язання.** Оскільки заданий вираз можна вважати квадратним тричленом відносно змінної  $a$ , то мінімальне значення він набуває у вершині, тобто при  $a = -\frac{-4b}{2} = 2b$ . Тоді шуканий вираз матиме такий вигляд:

$$4b^2 + 5b^2 + 8c^2 - 8b^2 - 4bc - 8c + 24 = b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24.$$

Тепер цей вираз вважатимемо квадратним відносно змінної  $b$ , він набуває найменшого значення при  $b = -\frac{-4c}{2} = 2c$ . Шуканий вираз стає таким:

$$4c^2 + 8c^2 - 8c^2 - 8c + 24 = 4c^2 - 8c + 24.$$

Ця парабола має найменше значення у вершині, тобто при  $c = -\frac{-8}{8} = 1$ .

Таким чином шукане найменше значення дорівнює  $4 - 8 + 24 = 20$  і досягається при  $c = 1, b = 2c = 2, a = 2b = 4$ .

**10–5.1.** У кожную клітинку прямокутної таблиці завбільшки  $17 \times 19$  записані попарно різні непарні натуральні числа. Доведіть, що при будь-якому такому заповненні числами, завжди знайдуться дві клітинки зі спільною стороною, в яких записані числа з різницею, що більша або дорівнює 20.

**Розв'язання.** Дві клітинки зі спільною стороною назвемо суміжними. Зауважимо, що різниця будь-яких двох чисел у суміжних клітинках є парним числом. Припустимо, що найбільша можлива різниця дорівнює 18. Без обмеження спільності можна вважати, що найменше число в таблиці дорівнює 1. Нехай найбільше буде  $M$ . Оскільки числа різні та непарні, маємо  $M \geq 2 \cdot 17 \cdot 19 - 1 = 645$ . Розглянемо клітинки, які містять числа 1 та  $M$ , і найкоротший ланцюжок суміжних клітинок, який з'єднує ці дві клітинки. Цей ланцюжок має не більше  $(17 - 1) + (19 - 1) = 34$  клітинок (за винятком першої), а різниці між числами в будь-яких двох суміжних не перевищують 18. Тоді  $M \leq 1 + 34 \cdot 18 = 613$ , що суперечить нерівності для  $M$ , отриманій вище.

## 11 клас

**11–1.** Знайдіть усі такі значення  $c$ , для яких рівняння  $27x^2 - 12x + c = 0$  має два корені, один з яких є квадратом другого.

**Відповідь:** 1 та  $-64$ .

**Розв'язання.** Позначимо корені  $x_1$  та  $x_2 = t$ , при цьому нехай  $x_1 = x_2^2 = t^2$ . Тоді з теореми Вієта маємо рівності:  $x_1 x_2 = \frac{c}{27}$  та  $x_1 + x_2 = \frac{12}{27}$ . З другого рівняння знаходимо, що  $t^2 + t - \frac{4}{9} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$ ,

$t = -\frac{4}{3}$ . Звідси знаходимо шукані значення для  $c = 27x_1x_2$ :

$$27x_1x_2 = 27 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = 1 \text{ та } 27x_1x_2 = 27 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{16}{9} = -64.$$

**11–2.** Правильні п'ятикутник  $ABCDE$  та дев'ятикутник  $AMNOPQRSE$  розташовані так, як це показано на рис. 8. Знайдіть градусну міру  $\angle MBC$ .

**Відповідь:**  $178^\circ$ .

**Розв'язання.** З формули суми кутів многокутника маємо, що  $\angle BAE = 108^\circ$ ,  $\angle MAE = 140^\circ \Rightarrow \angle MAB = 140^\circ - 108^\circ = 32^\circ$ . Оскільки  $\triangle MBA$  – рівнобедрений, то  $\angle MBA = \frac{1}{2}(180^\circ - 32^\circ) = 74^\circ$ . Тоді

$$\angle MBC = 360^\circ - \angle MBA - \angle ABC = 360^\circ - 74^\circ - 108^\circ = 178^\circ.$$

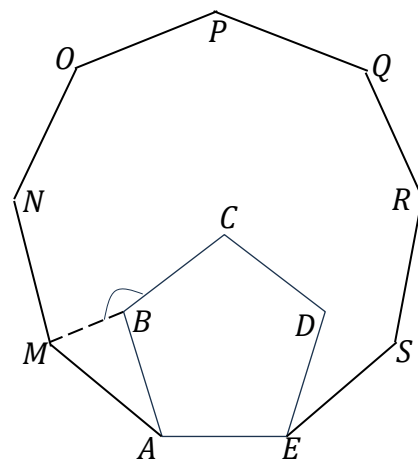


**Рис. 8**

**11–3.** Яка найбільша можлива сума цифр шестицифрового числа, яке ділиться на кожне з чисел: 5, 6, 7, 8 та 9?

**Відповідь:** 36.

**Розв'язання.** Число має закінчуватися на 0, бо інакше, воно не зможе одночасно ділитися на 5 та 8. Сума цифр має бути кратною 9, таким чином подільність на 6 забезпечується автоматично. Залишаються умови, щоб трицифрове число, що утворюють 3 останні цифри ділилося на 8 та все число ділилося на 7. Оскільки ми маємо останньою цифрою 0, то сума інших 5 цифр не перевищує 45. Але таке число єдине і дорівнює 999990, яке очевидно не задовольняє умову, бо, наприклад, воно не ділиться на 8.

Оскільки шукане число з максимальною сумою цифр кратно 9, то наступною за величиною може бути сума цифр 36. Покажемо, що 36 – шукана відповідь, підбравши відповідний приклад: 992880. Щоб його знайти достатньо було розглянути 7 чисел:

$$992880, 983880, 974880, 965880, 956880, 947880, 938880, 929880.$$

Усі числа відрізняються на 9000, а тому вони мають утворювати повну групу остач при діленні на 7, тому серед них гарантовано є кратно 7.

**11–4.** Петрик написав усі натуральні числа від 1 до 1000 включно, а Василь витер деякі з них. Виявилось, що серед чисел, що лишилися не витертими:

- рівно 272 числа, у записі яких зустрічається цифра 1;
- рівно 271 число, у записі яких зустрічається цифра 2;
- рівно 270 чисел, у записі яких немає ні цифри 1, ні цифри 2.

Скільки чисел витер Василь?

**Відповідь:** 241.

**Розв'язання.** Порахуємо методом виключення кількість чисел від 1 до 1000, що містять цифру 1. Не містять цифру 1: серед одноцифрових таких 8, серед двоцифрових таких  $8 \cdot 9 = 72$ , серед трицифрових таких  $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ , серед чотирицифрових 0. Разом 728. Таким чином чисел, що містять цифру 1, маємо  $1000 - 728 = 272$ . Тобто не було викреслене жодне число, що не містить цифру 1.

Так само ми знаходимо, що серед чисел від 1 до 1000 є 729 чисел, які не містять цифри 2 у своєму записі. Отже  $1000 - 729 = 271$  чисел від 1 до 1000 містять у своєму записі цифру 2. Таким чином усі числа, що містять цифру 2 не були викреслені.

Залишається порахувати, скільки чисел від 1 до 1000 не містять у своєму записі цифр 1 та 2. Серед одноцифрових таких 7, серед двоцифрових таких  $7 \cdot 8 = 56$ , серед трицифрових таких  $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ , серед чотирицифрових 0. Разом 511. Таким чином чисел, що не містять цифр 1 та 2 маємо 511. Таким чином викресленими були  $511 - 270 = 241$  чисел.

**11–5.** Нехай кола з центрами в точках  $K_1$  та  $K_2$  та радіусами  $R_1$  та  $R_2$  відповідно, дотикаються зовнішнім чином у точці  $A$ . Позначимо через  $\varepsilon$  – спільну зовнішню дотичну до цих кіл. Перпендикуляр до прямої  $\varepsilon$ , який проходить через точку  $A$ , перетинає серединний перпендикуляр до відрізка  $K_1K_2$  у точці  $B$ . Доведіть, що справджується рівність:  $K_1K_2 = 2AB$ .

**Розв’язання.** Нехай  $T_1$  та  $T_2$  відповідно – точки дотику прямої  $\varepsilon$  з заданими колами (рис. 9). Проведемо спільну дотичну до цих кіл через точку  $A$ , що перетинає пряму  $\varepsilon$  у точці  $E$ .

За побудовою  $\Delta K_1T_1E = \Delta K_1AE$ , як прямокутні з спільною гіпотенузою та рівними катетами. Аналогічно  $\Delta K_2T_2E = \Delta K_2AE$ . Тоді

$$\angle T_1EK_1 = \angle AEK_1, \angle T_2EK_2 = \angle AEK_2.$$

Тоді

$$180^\circ = \angle T_1EK_1 + \angle AEK_1 + \angle AEK_2 + \angle T_2EK_2 \Rightarrow \\ 90^\circ = \angle AEK_1 + \angle AEK_2,$$

тому  $\Delta K_1EK_2$  – прямокутний. Нехай точка  $M$  –

середина відрізка  $K_1K_2$ . Тоді  $EM$  – медіана з прямого кута  $\Delta K_1EK_2$ , тому  $K_1K_2 = 2EM$ . Для завершення доведення достатньо показати, що  $EABM$  – паралелограм.

Оскільки  $EA$  та  $BM$  – перпендикуляри до прямої  $K_1K_2$ , то вони паралельні. З рівності  $ME = MK_1$ , то  $\angle MEK_1 = \angle MK_1E = \angle AK_1E$ , крім того  $\angle AK_1E = \angle T_1K_1E$ , тому  $\angle MEK_1 = \angle T_1K_1E$ , звідки випливає, що  $ME \parallel T_1K_1$ . Крім того  $AB$  паралельно  $K_1T_1$  як перпендикуляри до прямої  $\varepsilon$ . Тому  $ME \parallel AB$ , що й завершує доведення.

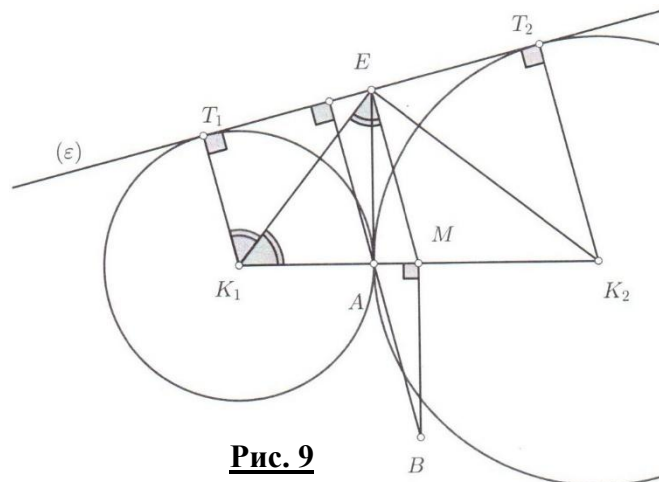


**Рис. 9**

**11–4.1.** У школі у Іванки 75 друзів, а у Петрика – 77 друзів. У кожного з інших учнів у цій школі рівно по 76 друзів. Коли учень дізнається таємницю, він ділиться нею зі своїми друзями. Доведіть, що якщо Іванка дізнається таємницю, то через деякий час її дізнається і Петрик.

**Розв’язання.** Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що Петрик не дізнається секрету. Це означає, що в них з Іванкою не існує ланцюга друзів, що ведуть від одного до іншого. Тобто, якщо розглянути множину  $I$  усіх школярів, які дізнаються секрет від Іванки за певний час, то там у Іванки 75 друзів, а в усіх інших – по 76. Додамо кількості друзів кожного школяра множини  $I$ . Це буде непарне число вигляду  $76k + 75$ . Але при такому додаванні кожна пара друзів порахована двічі, тобто це число має бути парним. Одержана суперечність завершує доведення.

**11–5.1.** У чотирикутнику  $ABCD$  середини сторін  $AB$  та  $CD$  позначимо через  $E$  та  $F$  відповідно. Відрізки  $AF$ ,  $BF$ ,  $CE$ ,  $DE$  та  $EF$  розділяють чотирикутник  $ABCD$  на 8 трикутників, площі яких ми позначимо  $a, b, c, d$  та  $p, q, r, s$ , як це показано на рис. 10. Доведіть, що справджується рівність:  $b + s = d + q$ .

**Розв’язання.** Зрозуміло, що справджуються така рівність:  $a + d = p + q$ , оскільки це рівносильне тому, що  $S_{AEF} = S_{BEF}$ . А це в свою чергу випливає з того, що ці трикутники мають спільну висоту та рівні основи  $AE = EB$ . Аналогічно  $S_{CEF} = S_{DEF}$ , звідки  $c + d = r + q$ . Віднімемо одержані дві рівності:

$$(a + d) - (c + d) = (p + q) - (r + q) \Rightarrow a - c = p - r \\ \Rightarrow a + r = p + c,$$

що доводить першу рівність.

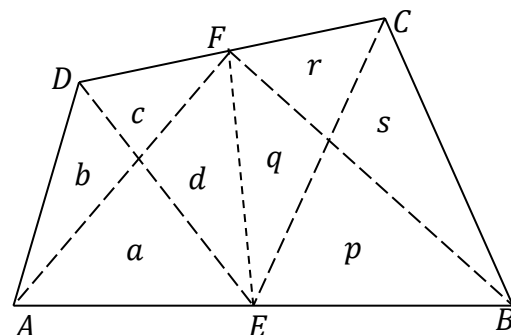


**Рис. 10**

Розглянемо трикутники  $AED$ ,  $BEC$  та  $ABF$  з основами  $AE$ ,  $BE$  та  $AB$ , їхні висоти позначимо  $x$ ,  $y$  та  $z$  відповідно. З теореми Фалеса зрозуміло, що  $\frac{x+y}{2} = z$ . Звідси маємо, що

$$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot AE, S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot BE, S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot z \cdot AB \Rightarrow$$

$$S_{AED} + S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot (x + y) \cdot AE = z \cdot AE = 2S_{ABF} \Rightarrow$$

$$a + b + p + s = a + d + p + q \Rightarrow b + s = d + q,$$

що й треба було довести.