

**Розв'язання завдань I етапу Всеукраїнської
олімпіади з математики для 6–7 класів
(2026–2027 навчальний рік)**

«Відважтеся мислити самостійно».
Вольтер

6 клас

1. Трицифрове число починається з цифри 7. З нього отримали інше трицифрове число, переставивши цю цифру в кінець. Отримане число виявилось на 117 менше за початкове. Знайдіть початкове число.

Відповідь: 764.

Розв'язання. Позначимо початкове число $\overline{7ab}$, тоді ми отримали таку рівність: $\overline{7ab} - \overline{ab7} = 117$. Використовуючи десятковий запис числа маємо рівність:

$$700 + 10a + b - 100a - 10b - 7 = 117.$$

Далі просто отримуємо, що $90a + 9b = 576$, звідки $10a + b = 64$ і шукане число 764.

Рис. 1

2. Перекладіть у заданому на рис. 1 виразі один сірник, щоб утворилася правильна рівність.

Відповідь: можлива відповідь показана на рис. 2.

3. На колі за рухом годинникової стрілки позначені точки $A_1, A_2, \dots, A_{20}$. Розглянемо 20-кутник $M = A_1A_2 \dots A_{20}$. Відрізок, що з'єднує не сусідні вершини називається діагоналлю. Скільки у многокутника M діагоналей, що відрізають від нього трикутник?

Рис. 2

Відповідь: 20.

Розв'язання. Діагоналі, що відрізають трикутник – це діагоналі, що з'єднують вершини через одну, наприклад, $A_3A_5, A_{17}A_{19}$ або $A_{20}A_2$. З кожної вершини виходить 2 такі діагоналі, наприклад, A_3A_5 та A_5A_7 . При цьому кожна така діагональ рахувалася двічі, а тому усього таких діагоналей 20.

4. Скільки щонайменше камінців має бути у Олесі, щоб їх можна було поділити на три купки так, щоб кількість камінців у першій купці була більшою ніж сума кількостей камінців у двох інших купках та меншою ніж добуток кількостей камінців у цих двох купках?

Відповідь: 13.

Розв'язання. Позначимо кількість камінців у купках a, b, c . Тоді мають одночасно виконуватись такі умови: $a > b + c$ та $a < bc$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $b \geq c$. Очевидно, що $c > 1$, бо інакше $a > b + 1 > b \cdot 1 > a$ і отримали суперечність. Якщо $b = c = 2$, то шуканого a не існує, оскільки $b + c = bc$. Таким чином $b + c \geq 5$. При $b + c = 5$ матимемо, що $b = 3, c = 2$. Але тоді $a > b + c = 5$ та водночас $a < bc = 6$. Тобто шуканого значення не існує. Таким чином найменші можливі значення для $b + c = 6$ та $a = 7$. Вони умову задовольняють при $b = c = 3$. Тому найменша сумарна кількість камінців – це $a + b + c = 13$.

7 клас

1. Скільки трицифрових чисел діляться одночасно на 1, 2, 3, 4, 5 та 6?

Відповідь: 15.

Розв'язання. Неважко збагнути, що потрібно, щоб число ділилося на 60. Тому серед чисел до 1000 таких маємо 16, але серед них є одне двоцифрове -- 60. Таким чином усього їх рівно 15.

2. Квадрат $ABCD$ зі стороною 10 розрізаний на два трикутника BCK та ABM , квадрат $MNKD$ та чотирикутник $BKNM$, як це показано на рис. 3. Знайдіть площу чотирикутника $BKNM$, якщо відомо, що $AM = 2$.

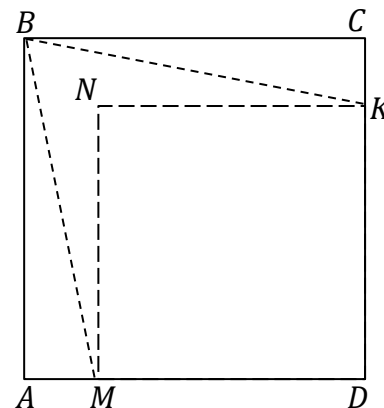


Рис. 3

Відповідь: 16.

Розв'язання. Очевидно, що ці трикутники однакові. Якщо їх прикласти один до іншого, то вийде прямокутник завбільшки 2×10 з площею 20. Менший квадрат має розміри 8×8 . Тому площа чотирикутника складає $100 - 64 - 20 = 16$.

3. Набір цілих чисел занумерований числами 1, 2, ..., 2026 будується таким чином. Перші два числа набору 27 та 1, а наступні числа задовольняють таку умову: сума 1-го, 2-го та 3-го чисел дорівнює 2040, сума 2-го, 3-го та 4-го чисел дорівнює 2039, сума 3-го, 4-го та 5-го чисел дорівнює 2038 і так далі. Чому дорівнює останнє число цього набору?

Відповідь: -648.

Розв'язання. Якщо a, b, c, d – чотири послідовні члени цієї послідовності, то легко отримати таку закономірність: $b + c + d = a + b + c - 1$, звідки випливає, що $d = a - 1$. Таким чином, оскільки усі члени легко вирахувати через перші три, то бачимо, що $2026 = 3 \cdot 675 + 1$, то треба взяти перше число набору та відняти від нього 675: $27 - 675 = -648$.

4. У Петрика є картка, на якій записане натуральне число 12. Він може замінювати картку, яка в нього є на даний момент, на іншу картку за одним з двох таких правил:

- картку з числом n на ній він може замінити на картку з числом $2n + 1$;
- якщо у Петрика є картка, на якій записане число n , що ділиться націло на 3, то він може замінити її на картку з числом $\frac{1}{3}n$.

Які з трьох чисел 29, 100 та $2^{2012} - 1$ Петрик може отримати з початкової картки?

Відповідь: не можна отримати з цих чисел 100, інші можна.

Розв'язання. Спочатку покажемо, як можна отримати перше та третє числа. Спочатку число 29:

$$12 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 31 \rightarrow 63 \rightarrow 21 \rightarrow 43 \rightarrow 87 \rightarrow 29.$$

Тепер число $2^{2012} - 1$:

$$12 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 3 = 2^2 - 1 \rightarrow 2 \cdot (2^2 - 1) + 1 = 2^3 - 1 \rightarrow 2 \cdot (2^3 - 1) + 1 = 2^4 - 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (2^{2011} - 1) + 1 = 2^{2012} - 1.$$

За першим правилом можна отримати лише непарне число, за другим правилом можна отримати парне число лише з парного числа при цьому нове число стане у 3 рази менше за початкове. Таким чином серед парних чисел можна отримати лише 12 та 4, а тому число 100 отримати неможливо.